

69031

COLECȚIE DE REDACȚIE

Prof. dr. doc. VAL BUCDARU, prof. dr. doc. N. V. HOȚAN, prof. dr. ing. GH. CASARE

prof. dr. ing. M. CALITANU (responsabil), prof. dr. B. STALCUBUȚ

prof. dr. doc. D. MANCIBROȘ, prof. dr. ing. T. ȘILIG

asist. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU, prof. dr. ing. I. VIAR

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

Tomul XXIV (XXVIII)

Fasc. 1—2

MATEMATICĂ

SECȚIA I MECANICĂ TEORETICĂ

FIZICĂ

1978

Prof. dr. doc. D. MANCIBROȘ (redactor responsabil)

Prof. dr. doc. ing. ALBERTO DI ARII (secretar de redacție)

Asist. ing. ANETA BRĂILEA (redactor)

1989

— COLEGIUL DE REDACȚIE —

Prof. dr. doc. VAL. BLIDARU, prof. dr. doc. N. V. BOȚAN, prof. dr. ing. GH. CAȘLER,
 prof. dr. ing. M. GAFÎȚANU (președinte), prof. dr. P. MÂLCOMETE,
 prof. dr. doc. D. MANGERON, prof. dr. ing. T. SILION,
 acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU, prof. dr. ing. I. VLAD



— COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI —

I. MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

Prof. dr. doc. AL. CLIMESCU
 Prof. dr. doc. N. IRIMICIUC
 Prof. dr. doc. EMIL LUCA



— REDACȚIA —

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
 Prof. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
 Asist. ing. ANETA BRAIER (redactor)



Secția I

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

S U M A R

	Pag.
ROBERT VALLÉE (Franța), Teoria sistemelor și transferuri de structuri (franc., rez. rom.)	9
R. W. KIEBOOM (Belgia), Cind este egală cu zero loop clasa unei fibrații ? (engl., rez. rom.)	13
M. GONTINEAC și ELENA SÎRBU, Cîteva proprietăți ale operatorilor de derivare bază (rom., rez. engl.)	17
UBIRATAN D'AMBROSIO (Brazilia), Asupra mulțimilor vagi și a proceselor optime generalizate (port., rez. rom.)	21
ELENA VAMANU, Cvasi-conexiuni pe spații Riemann particulare (rom., rez. franc.)	25
DARIO MARAVALL CASESNOVES (Spania), Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu valori inițiale aleatoare (span., rez. rom.)	33
AL. NEAGU, Distribuții cvasi-structurale (rom., rez. engl.)	39
I. GHINEA, Invarianți ai grupului de transformări de conexiuni Finsler conform metrice (rom., rez. franc.)	43
AKIRA MATSUDA (Japonia), Transformări de grafice concurente în grafice circulare cu contact tangențial (engl., rez. rom.)	47
CARMEN ZITRON, Teoreme de izomorfism pentru grafuri (germ., rez. rom.)	51
N. GRĂDINARU, Tipul unui semigrup n -parametric de operatori liniari (engl., rez. rom.)	55
ILIE BURDUJAN, O notă asupra unei teoreme a lui S. N. Hudson (franc., rez. rom.)	59
E. J. HAUG (SUA) și B. M. KWAK (Coreea de Sud), Metodă numerică pentru proiectarea optimală parametrică (engl., rez. rom.)	63
VICTOR FLORIN POTERAȘU, Sinteza sensibilității strategiilor optime pentru jocuri diferențiale cu parametri distribuiți. (II). Jocuri sensitive (engl., rez. rom.)	67

	<u>Pag.</u>
MARICA LEWIN , Asupra soluțiilor unor ecuații integrale și diferențiale (engl., rez. rom.)	75
GH. NISTOR și ANETA BRAIER , Evaluarea preciziei vectorului deplasării construcțiilor determinat prin măsurări indirecte, ponderate (rom., rez. franc.)	81
I. MERCHES , I. CIOBOTARIU și C. GRIGORESCU , Un principiu variațional în magnetohidrodinamică. (II) Formularea lagrangeană (engl., rez. rom.) . .	85
GH. GR. CIOBANU , Stabilitatea soluțiilor în viscoelasticitatea liniară (engl., rez. rom.)	91
I. CRĂCIUN , Formula Green pentru un domeniu infinit cu o cavitate și reprezentarea integrală a unei soluții regulate în termoelasticitatea micropolară (engl., rez. rom.)	97
I. NISTOR , Propagarea undelor în medii micropolare anizotrope (engl., rez. rom.)	107
EMIL LUCA , MARCEL MOISE și SOFIA MELINTE , Asupra unor caracteristici electrice și galvanomagnetice la straturi subțiri de telur (rom., rez. engl.)	113
GH. TACU , Dispozitiv pentru jeturi de gaze în analiza spectrografică de emisie (franc., rez. rom.)	117
C. COTAE , GHIORGHE CĂLUGĂRU și EMIL LUCA , Proprietățile magnetice ale particulelor de Co-P obținute prin reducere autocatalitică (franc., rez. rom.)	123

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Tome XXIV (XXVIII), Fasc. 1—2

1978

Section I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

C O N T E N T S

	Pp.
ROBERT VALLÉE (France), Théorie des systèmes et transferts de structures (French, Romanian summary)	9
R. W. KIEBOOM (Belgium), When is the Loop Class of a Fibration equal to Zero ? (English, Romanian summary)	13
M. GONTINEAC and ELENA SÎRBU, Some Properties of the Basic Derivative Operators (Romanian, English summary)	17
UBIRATAN D'AMBROSIO (Brasil), Sobre conjuntos núbilos e processos otimais generalizados (Portuguese, Romanian summary)	21
ELENA VAMANU, Quasi-connexions sur des espaces Riemann particuliers (Romanian, French summary)	25
DARIO MARAVALL CASESNOVES (Spain), La integracion de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales aleatorios (Spanish, Romanian summary)	33
AL. NEAGU, Quasi-Structural Distributions (Romanian, English summary) . .	39
I. GHINEA, Invariants des groupes de transformations des connexions finisliennes conformes métriques (Romanian, French summary)	43
AKIRA MATSUDA (Japan), Transformations from Concurrent Charts into Tangential Contact Circular Charts (English, Romanian summary)	47
CARMEN ZITRON, Isomorphismussätze für Graphen (German, Romanian summary)	51
N. GRĂDINARU, The Type of a n -Parametric Semigroup of Linear Operators (English, Romanian summary)	55
ILIE BURDUJAN, Une Note sur un théorème de S.N. Hudson (French, Romanian summary)	59
E. J. HAUG (USA) and B. M. KWAK (South Korea), A Numerical Method for Parametric Optimal Design (English, Romanian summary)	63
VICTOR FLORIN POTERAȘU, Sensitivity Synthesis of Optimal Strategies for Distributed Parameter Differential Games. (II) Sensitivity Games (English, Romanian summary)	67

	Pp.
MARICA LEWIN, On the Solution of some Integral and Differential Equations (English, Romanian summary)	75
GH. NISTOR et ANETA BRAIER, Estimation de la précision du vecteur déplacement des constructions obtenu par des mesures indirectes pondérées (Romanian, French summary)	81
I. MERCHES, I. CIOBOTARIU and C. GRIGORESCU, Variational Principle in Magnetohydrodynamics. (II) The Lagrangian Approach (English, Romanian summary)	85
GH. GR. CIOBANU, Stability of the Solutions in Linear Viscoelasticity (English, Romanian summary)	91
I. CRĂCIUN, Green Formula for an Infinite Domain with a Cavity and Integral Representation of a Regular Solution in Micropolar Thermoelasticity (English, Romanian summary)	97
I. NISTOR, Wave Propagation in Anisotropic Micropolar Bodies (English, Romanian summary)	107
EMIL LUCA, MARCEL MOISE and SOFIA MELINTE, On some Electrical and Galvanomagnetical Characteristics of Tellurium Films (Romanian, English summary)	113
GH. TACU, Dispositif pour jets de gaz dans l'analyse spectrographique d'émission (French, Romanian, summary)	117
C. COTAE, GHIORGHE CĂLUGĂRU et EMIL LUCA, Les propriétés magnétiques des grains de Co-P obtenus par réduction autocatalytique (French, Romanian summary)	123

Секция I

МАТЕМАТИКА, ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

	<u>Стр.</u>
РОБЕР ВАЛЛЕ (Франция), Теория систем и переносы структур (франц., рез. рум.)	9
Р. В. КИБОУМ (Бельгия), Какда равен нулю дуп класс, одном фибрации (англ., рез. русск.)	13
М. ГОНТИНЯК и ЭЛЕНА СЫРБУ, Некоторые свойства производных базисных - операторов (рум., рез. англ.)	17
УБИРАТАН Д'АМБРОЗИО (Бразилия), О размытых рядах и обобщенных оптимальных процессах (португаль., рез. рум.)	21
ЭЛЕНА ВАМАНУ, О квази - связностях над специальными римановыми пространствами (рум., рез. франц.)	25
ДАРИО МАРАВАЛ КАЗЕСНОВЕС (Испания), Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений со случайными начальными условиями (исп., рез. рум.)	33
АЛ. НЯГУ, Квази - структурные распределения (рум., рез. англ.)	39
Н. ГИНЯ, Инварианты групп преобразования финслеровых конформно - метрических связностей (рум., рез. франц.)	43
АКИРА МАТСУДА (Япония), Преобразование пересекающих графиков в круговые графики с касательным контактом (англ., рез. рум.)	47
КАРМЕН ЦИТРОН, Теоремы изоморфизма для графов (нем., рез. рум.)	51
Н. ГРЭДИНАРУ, Тип одного n - параметрической полугруппы линейных операторов (англ., рез. рум.)	55
ИЛИЕ БУРДУЖАН, Об одной теореме С.Н. Гудсона (франц., рез. рум.)	59
Э. ДЖ. ХОГ (США) и Б. М. КУОК (Корея), Численный метод оптимального параметрического проэктирования (англ., рез. рум.)	63
ВИКТОР ФЛОРИН ПОТЕРАШУ, Чувствительности синтез оптимальных стратегии для дифференциальных игры с распределенными параметрами (II) (англ., рез. рум.)	67

	Стр.
МАРИКА ЛЕВИН, О решениях некоторых дифференциальных и интегральных уравнении (англ., рез. рум.)	75
Г. НИСТОР и АНЕТА БРАИЕР, Оценка точности вектора смещения сооружений определяемые при помощи косвенных весовых измерений (рум., рез. франц.)	81
И. МЕРКЕС, И. ЧИОБОТАРЮ и К. ГРИГОРЕСКУ, Вариационный принцип в магнетогидродинамике (II) (англ., рез. рум.)	85
Г. ГР. ЧИОБАНУ, Устойчивости решения в линейной вязкоэластичности (англ., рез. рум.)	91
И. КРЭЧОН, Формулы Грина для бесконечной области с одной полостью и интегральное выражение одного регулярного решения в микрополярной термоупругости (англ., рез. рум.)	97
И. НИСТОР, Распространение волн в микрополярных анизотропных средах (англ., рез. рум.) ²	107
ЭМИЛ ЛУКА, МАРЧЕЛ МОИСЕ и СОФИЯ МЕЛИНТЕ, Над одним электрическим и гальваномантическим характеристикам в тонких пленках теллура (рум., рез. англ.)	113
Г. ТАКУ, Прибор для газовых струй в эмиссионном спектрографическом анализе (франц., рез. рум.)	117
К. КОТАЕ, ГИОРГЕ КЭЛУГЭРУ и ЭМИЛ ЛУКА, Магнитные свойства Со - Р частиц полученных при автокаталитическим восстановлением (франц., рез. рум.)	123

THÉORIE DES SYSTÈMES ET TRANSFERTS DE STRUCTURES

PAR

ROBERT VALLÉE

1. Un modèle en théorie des systèmes. Soit $\mathcal{S}$ un système et $\mathcal{N}$ la nature environnante. L'évolution de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{N}$ vont avoir lieu de l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant $t = T$. On suppose qu'à l'instant t l'état du système $\mathcal{S}$ peut être décrit par $x(t)$ et celui de $\mathcal{N}$ par $u_1(t)$. Les fonctions x et u_1 prennent leurs valeurs, la première dans l'ensemble des états possibles de $\mathcal{S}$ et la seconde dans celui des états possibles de $\mathcal{N}$. Nous dirons que x est la *chronique* de $\mathcal{S}$ et u_1 celle de $\mathcal{N}$. L'ensemble de toutes les chroniques x , possibles a priori, est noté S , celui de toutes les chroniques u_1 est noté N . Le produit $E = S \times N$ est alors l'ensemble de tous les couples $\xi = (x, u_1)$ ou *espace des couples de chroniques*, possibles a priori.

Le système réagit à la nature et à lui-même d'une façon qui dépend de ce qu'il „sait” de la nature et de lui-même. Sa réaction à l'instant t dépend de ce qu'il connaît de toute l'histoire des états de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{N}$ depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t . Soit donc $t \rightarrow y(t)$ l'histoire de $\mathcal{S}$ telle que la voit $\mathcal{S}$ lui-même. Cette fonction y est la *chronique observée* de $\mathcal{S}$. Naturellement $\mathcal{S}$ prend connaissance de y à mesure que le temps s'écoule, à l'instant t il n'en connaît que la restriction à $[0, t]$. De façon analogue, soit v_1 la chronique de $\mathcal{N}$ vue par $\mathcal{S}$ ou *chronique observée* de $\mathcal{N}$. Ainsi, à tout couple $\xi = (x, u_1)$ correspond un couple $\eta = (y, v_1)$, ce qui définit une application O de E sur $O(E) = F$

$$(x, u_1) = \xi \rightarrow O(\xi) = \eta = (y, v_1).$$

Nous appelons O „opérateur d'observation” [1], [4]. On peut dire qu'il est *causal* en ce sens que $\eta(t)$ dépend seulement de la restriction de ξ à $[0, t]$, il agit donc seulement sur le passé et le présent de ξ .

Le système $\mathcal{S}$ réagit en se fondant sur ce qu'il connaît de ξ , c'est à dire sur η . Il choisit donc, à l'instant t , une commande $\zeta(t)$ qui d'ailleurs ne peut dépendre que des valeurs prises par η en t ou antérieurement à t . La fonction $t \rightarrow \zeta(t)$, à valeurs dans l'ensemble de toutes les commandes instantanées possibles, est la *commande globale*, elle est obtenue à partir de η par une application $\mathcal{D}$ de F sur $G = \mathcal{D}(F)$ ou espace des *commandes globales* possibles a priori

$$\eta \rightarrow \mathcal{D}(\eta) = \zeta.$$

Nous désignons $\mathcal{D}$ sous le nom d'„opérateur de décision“ [4], il est évidemment *causal* ainsi que nous venons de le dire.

Enfin, la commande globale ζ (que nous désignons aussi par u_2) agit sur $\mathcal{S}$. Mais, dans le cas général, $\mathcal{S}$ subit aussi l'action directe de $\mathcal{N}$ engendrée par u_1 . En définitive le résultat des actions conjointes dûes à u_1 et à $u_2 = \zeta$, est, compte tenu de la condition initiale $x(0)$, la chronique x de $\mathcal{S}$

$$(u_1, u_2) = u \rightarrow \mathcal{E}(u) = x,$$

$\mathcal{E}$ étant une application de $H = N \times G$ dans S que nous appellerons „effecteur“ (c'est aussi un opérateur *causal*). Le schéma total implique donc une *rétroaction* partielle qui permet d'écrire

$$x = \mathcal{E}(u_1, \mathcal{DO}(x, u_1)),$$

avec la donnée de $x(0)$.

On peut dire que l'opérateur d'observation $\mathcal{O}$ décrit l'aspect *épistémologique* du comportement du système alors que le produit $\mathcal{E}\mathcal{O}$, que l'on peut désigner par $\mathcal{P}$ et que nous appellerons „opérateur pragmatique“ [4] en décrit l'aspect *praxéologique* en omettant les étapes décrites par $\mathcal{O}$ et par $\mathcal{D}$. On a alors

$$(x, u_1) = \xi \rightarrow \mathcal{P}(\xi) = \zeta = u_2$$

et

$$x = \mathcal{E}(u_1, \mathcal{P}(x, u_1)).$$

2. Réductionnisme. Que l'on considère le passage de l'objet observé ξ à son image η par l'intermédiaire de $\mathcal{O}$ ou le passage de ξ à son autre image ζ par l'intermédiaire de $\mathcal{P}$, on est, mathématiquement, en face de phénomènes de même type, les aspects épistémologique et pragmatique du comportement du système sont décrits en des termes de même nature. La chronique observée η et la commande globale ζ sont des images de la chronique réelle. Adoptons le point de vue épistémologique. Si $\mathcal{O}$ est une bijection de E sur $\mathcal{O}(E) = F$, le passage de ξ à η implique en général une déformation mais pas de perte informationnelle, la commande globale tient parfaitement compte du couple des chroniques réelles. Si, au contraire, $\mathcal{O}$ est une surjection (sans être une injection) il y aura non seulement déformation mais perte. Soit $\mathcal{O}^{-1}$ l'application image réciproque de $\mathcal{O}$, confondue avec l'application inverse lorsque $\mathcal{O}$ est bijective. Soit ξ^* l'image réciproque de η , nous avons par définition

$$\mathcal{O}(\xi^*) = \eta \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}^{-1}(\eta) = \xi^*.$$

La partie ξ^* est l'ensemble des éléments de E dont l'image par $\mathcal{O}$ est η , l'élément ξ est évidemment l'un d'eux. Deux éléments ξ et ξ' , appartenant à ξ^* , sont *épistémologiquement indiscernables* pour le système $\mathcal{S}$ qui „voit“ la même chronique observée η car

$$\mathcal{O}(\xi) = \mathcal{O}(\xi').$$

Il y a entre ξ et ξ' une relation d'équivalence $\mathcal{I}$ dont ξ^* est une classe d'équivalence. On écrit

$$\xi \mathcal{I} \xi' \Leftrightarrow \xi \Leftrightarrow \xi' \text{ et } \xi' \in \xi^*.$$

En d'autres termes, ξ^* représente, quand la chronique observée est $\eta = O(\xi)$, le *pouvoir de résolution épistémologique du système* (plus ξ^* est „petit“ plus ce pouvoir de résolution est grand). L'ensemble $E/\mathcal{I}$, quotient de E par la relation $\mathcal{I}$, ou ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{I}$, est ce que, épistémologiquement parlant, le système est amené à considérer, au lieu et place de E . La confusion entre E et $E/\mathcal{I}$ décrit un certain *réductionnisme épistémologique* de la part du système [4].

Bien entendu les considérations précédentes peuvent être reprises en remplaçant O par $\mathcal{P}$ [4]. On rencontre alors des objets ξ *praxéologiquement indiscernables*, une relation d'équivalence $\propto$ associée à cette indiscernabilité, un *pouvoir de résolution praxéologique* et enfin un *réductionnisme praxéologique* consistant à substituer $E/\propto$ à E lui-même. Lorsque l'étape épistémologique n'est pas oubliée volontairement nous avons vu que $\mathcal{P}$ peut être factorisé sous la forme $\mathcal{D}O$. Il en résulte que le pouvoir de résolution praxéologique est inférieur, au sens large, au pouvoir de résolution épistémologique, les classes d'équivalence induites par $\mathcal{P}$ étant des réunions de classes d'équivalence induites par O .

3. Transferts de structures. Nous avons vu comment les opérateurs O et $\mathcal{P}$ décrivent les comportements épistémologique et praxéologique du système $\mathcal{S}$. Nous allons voir maintenant comment s'introduisent les *subjectivités épistémologique et praxéologique*. Pour ne pas alourdir nous allons considérer la subjectivité épistémologique, étant entendu que les résultats sont transposables au cas praxéologique. L'influence du dispositif observationnel sur l'attribution à E de structures subjectives s'exerce, par l'intermédiaire de l'application O de E sur F , à partir des structures intrinsèques à F . Ce passage de structures de $F = O(E)$ à des structures attribuées à E fait intervenir l'application O^{-1} , de F dans l'ensemble des parties de E , image réciproque de l'application O dont nous avons déjà vu l'importance. Ce rôle de l'application image réciproque a été mis en évidence dans le cadre épistémologique statique par Léon Motchane [3], nous l'avons retrouvé en l'étendant au cas dynamique (ξ est une fonction du temps) et intégré dans notre formalisme des opérateurs d'observation puis, passant au cadre praxéologique, dans notre formulation en termes d'opérateurs pragmatiques [4]. Ces structures sont *transférées* de F à E souvent avec „affaiblissement“, par contre elles sont transférées intégralement de F à $E/\mathcal{I}$.

Supposons par exemple que F soit muni naturellement d'une *relation binaire* $\mathcal{R}$. L'ensemble E se trouve alors doté d'une relation binaire $\mathcal{O}$ définie par

$$\xi_1, \mathcal{O} \xi_2 \Leftrightarrow O(\xi_1) \mathcal{R} O(\xi_2),$$

quels que soient ξ_1 et ξ_2 appartenant à E . Autrement dit ξ_1 et ξ_2 sont considérés comme étant dans la relation $\mathcal{O}$ si l'on constate que leurs images $O(\xi_1)$ et $O(\xi_2)$ sont dans la relation $\mathcal{R}$. En effet les seules relations que le système puisse constater sont celles qu'il observe dans F . En attribuant à E la relation binaire $\mathcal{O}$, induite à partir de $\mathcal{R}$, le système se conduit de façon subjective, il projette partiellement une structure qui lui est interne et dont il a une „connaissance“ directe, sur E qui concerne la nature et lui-même. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $\leq$ (réflexive, antisymétrique, transiti-

ve) il est facile de voir que la relation $\mathcal{O}$ induite est, en général, seulement une relation de préordre $\leq$ (réflexive, transitive) car, si $\mathcal{O}$ n'est pas une bijection de E sur $\mathcal{O}(E)$, la propriété d'antisymétrie n'est pas conservée. La relation binaire induite est donc, dans ce cas, „plus faible“, elle incorpore d'ailleurs la relation d'équivalence $\mathcal{I}$ ou relation d'indiscernabilité rencontrée plus haut. Par contre si $\mathcal{P}$ est une relation de préordre ou une relation d'équivalence (réflexive, transitive), $\mathcal{O}$ en est une aussi. De la même façon si $\mathcal{R}$ est une relation de tolérance, on peut dire aussi de ressemblance (réflexive, symétrique), il en est de même de $\mathcal{O}$. Dans ces trois derniers cas, avec la relation attribuée à E , l'application $\mathcal{O}$ conserve respectivement le préordre, l'équivalence et la ressemblance.

Supposons maintenant que $F = \mathcal{O}(E)$ soit naturellement muni d'une topologie. Cette topologie est définie par l'ensemble des ouverts de F . On sait que l'ensemble de toutes les images réciproques par $\mathcal{O}$ des ouverts de F définit un ensemble d'ouverts admissible pour E . Cette topologie induite sur E , où tout ouvert est de la forme $\mathcal{O}^{-1}(\omega)$, ω étant un ouvert de F , est celle que la subjectivité du système attribue naturellement à E . Il y a ainsi transfert de la structure topologique de F à E et ce transfert fait de $\mathcal{O}$ une application continue de E sur F . Des considérations analogues aux précédentes peuvent aussi être développées au sujet du transfert subjectif d'une mesure (par exemple une loi de probabilité) de F à E .

Reçue le 12 Mars 1978

Université de Paris-Nord,
France

BIBLIOGRAPHIE

1. Vallée R., Sur deux classes d'„opérateurs d'observation“. C.R.Ac. Sci., 233, 1350 (1951).
2. Vallée R., Un point de vue algébrique en théorie macroscopique de l'observation. C.R.Ac. Sci., 241, 179 (1955).
3. Motchane L., Structures formelles du monde réel. Dans „La Méthode dans les sciences modernes“, prés. par F. Le Lionnais, p. 105, Éditions Science et Industrie, Paris, 1958.
4. Vallée R., Sur la formalisation mathématique en théorie de l'observation. Actes du VII-ème Congrès International de Cybernétique, Association Internationale de Cybernétique, Namur, 1973.
5. Vallée R., Observation, Decision and Structure Transfers in Systems Theory. Second European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Wien, 1974; in „Progress in Cybernetics and Systems Research“, vol. 1, p. 15, Hemisphere Publication Corporation, Washington, 1975.

TEORIA SISTEMELOR ȘI TRANSFERURI DE STRUCTURI

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei din lucrările [1]—[2], [4]—[5] referitoare la formalizarea matematică a teoriei observațiilor și ținînd seamă de rezultatele privitoare la elaborarea structurilor formale ale lumii reale [3], prezintă în această lucrare un model în teoria sistemelor și studiază apoi unele probleme de reductionism și de transferuri de structuri.

WHEN IS THE LOOP CLASS OF A FIBRATION EQUAL TO ZERO?

BY

R. W. KIEBOOM

0. Introduction. The loop class $[\xi]$ of a (Hurewicz) fibration $\xi = (E, p, B)$ with regular point e_0 (the base point of E), as defined by G. Allaud in [1], is the homotopy class, relative basepoints, of the map $\Phi: \Omega(B, b_0) \rightarrow F = p^{-1}(b_0)$ defined by $\Phi(\beta) = \lambda(e_0, \beta)$ (1) where λ is a lifting function for ξ (such that $\lambda(e_0, b_0^*) = e_0^*$).

Allaud's results concerning the question when $[\xi] = 0$ are: (i) if $[\xi] = 0$, then the fibration $\Omega(\xi)$ is fiber homotopy equivalent to the trivial fibration $\Omega(B \times F)$, which by [3], Theorem 2 is equivalent with $\Omega(\xi)$ having a cross section.

(ii) if ξ has a cross section then $[\xi] = 0$, but not conversely.

The object of this paper is to prove that (i) in fact characterizes $[\xi] = 0$, i.e. $[\xi] = 0$ if and only if $\Omega(\xi)$ has a cross section. Of course (ii) is then an immediate consequence. A preliminary proposition will show that $[\xi] = 0$ relates to the inclusion $i: F \rightarrow E$ being (almost) a homotopy monomorphism.

1. A First Characterization of $[\xi] = 0$. Let $\xi = (E, p, B)$ be a fibration with regular point e_0 and $[\xi]$ its loop class (for definitions and notations, see [1]). For a space X with base point x_0 , consider the map $i_{\#}: [X, x_0; F, e_0] \rightarrow [X, x_0; E, e_0]$ between sets of based homotopy classes induced by the inclusion $i: F \rightarrow E$. Then we have the following

Proposition 1.1. $[\xi] = 0$ if and only if for every space X , $\text{Ker } i_{\#} = 0$.

Proof. $\text{Ker } i_{\#} = 0$ for every X easily implies $[\xi] = 0$, since $[i \circ \Phi] = 0$ in $[\Omega(B, b_0), b_0^*; E, e_0]$. Conversely, suppose that $[\xi] = 0$, i.e. $[\Phi] = 0$ in $[\Omega(B, b_0), b_0^*; F, e_0]$. Consider for every X the following diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{h} & \Omega(E, F) & \longrightarrow & P(E, e_0) \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow p' \\
 X & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{i} & E
 \end{array}$$

where $p': P(E, e_0) = \{\alpha \in E^I \mid \alpha(0) = e_0\} \rightarrow E$ is the path space fibration $p'(\alpha) = \alpha(1)$, $q: \Omega(E, F) = \{\alpha \in P(E, e_0) \mid \alpha(1) \in F\} \rightarrow F$ is the

fibration induced from p' by i and $f: X \rightarrow F$ is a map such that $[i \circ f] = 0$ in $[X, x_0; E, e_0]$. Hence there is a map $h: (X, x_0) \rightarrow (\Omega(E, F), e_0^*)$ such that $q \circ h = f$. Since there is a homotopy equivalence $k: \Omega(B, b_0) \xrightarrow{\sim} \Omega(E, F): l$ with $k(\beta) = \lambda(e_0, \beta)$, $l(\alpha) = p \circ \alpha$ ([1], Prop. 1.1) it follows that $[f] = [q \circ h] = [q \circ k \circ l \circ h] = [\Phi \circ l \circ h] = 0$ in $[X, x_0; F, e_0]$. Thus $\text{Ker } i_{\#} = 0$ is proved.

Remark 1.2. $\text{Ker } i_{\#} = 0$ for every X does not imply that i is a monomorphism in the category of based spaces and based homotopy classes of maps. The latter statement is characterized by the operation of $\Omega(B, b_0)$ on F being trivial, i.e. $[\rho] = [\pi_1]$ in $[F \times \Omega(B, b_0), (e_0, b_0^*); F, e_0]$ where $\rho: F \times \Omega(B, b_0) \rightarrow F$ is the map defined by $p(x, \beta) = \lambda(x, \beta)(1)$. (see [6], Prop. 2.1).

However one can easily prove that the two statements are equivalent if there are maps $\mu: F \times F \rightarrow F$ and $\Phi: E \times F \rightarrow E$ such that (F, μ) is an H -group and $\Phi \circ (i \times \text{id}_F) = i \circ \mu$.

2. The Main Theorem. Let $\xi = (E, p, B)$ again be a fibration with regular point e_0 . Then we have the following

Proposition 2.1. *The basic fiber $F = p^{-1}(b_0)$ is contractible in E to e_0 , relative to e_0 if and only if $\Phi: \Omega(B, b_0) \rightarrow F: \beta \rightarrow \lambda(e_0, \beta)(1)$ has a right homotopy inverse, relative to e_0 .*

Proof. The „only if” part is well known (see [5], Prop. 7). Conversely, let $\psi: F \rightarrow \Omega(B, b_0)$ be a right homotopy inverse of Φ , relative to e_0 . Let G denote the homotopy $\Phi \circ \psi \simeq \text{id}_F$, rel e_0 . A contraction C of F in E to e_0 , relative to e_0 , is then given by

$$C(x, t) = \begin{cases} \lambda(e_0, \psi(x))(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ iG(x, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Corollary 2.2. *Let $p: EA \rightarrow A$ be the path space fibration ($EA = P(A, a_0)$, $p(\alpha) = \alpha(1)$) and let $p': B \cap_k EA \rightarrow B$ be the fibration induced from p by a map $k: (B, b_0) \rightarrow (A, a_0)$.*

Then $F' = p'^{-1}(b_0)$ is contractible in $B \cap_k EA$ to (b_0, a_0^) , relative to (b_0, a_0^*) if and only if $\Omega k: \Omega(B, b_0) \rightarrow \Omega(A, a_0)$ has a right homotopy inverse, relative to a_0^* .*

Proof. This follows easily from Prop. 2.1 since the loop class of p' turns out to be the based homotopy class of Ωk (identifying of course, $F' = \{b_0\} \times \Omega(A, a_0)$ with $\Omega(A, a_0)$).

We shall now prove the main theorem in a special case. Let $p'': P_k: \{(b, \alpha) \in B \times A^I \mid \alpha(0) = k(b)\} \rightarrow A: (b, \alpha) \rightarrow \alpha(1)$ be the fibration obtained by „converting” a map $k: (B, b_0) \rightarrow (A, a_0)$ into a fibration. (b_0, a_0^*) is a regular point of p'' with respect to the lifting function λ'' :

$$P_{p''} = \{((b, \alpha), \alpha') \in P_k \times A^I \mid \alpha'(0) = p''(b, \alpha) = \alpha(1)\} \rightarrow (P_k)^I$$

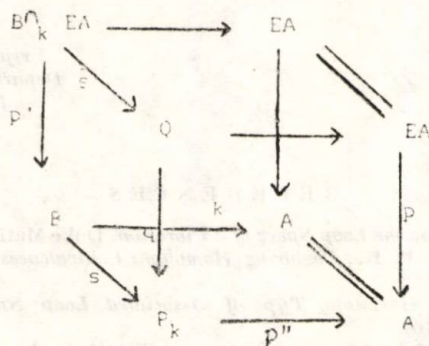
defined by $\lambda''((b, \alpha), \alpha')(t) = (b, \alpha *_{\alpha'} \alpha')$ where

$$(\alpha *_t \alpha')(\tau) = \begin{cases} \alpha \frac{2\tau}{2-t} & 0 \leq \tau \leq 1 - \frac{t}{2} \\ \alpha'(2\tau + t - 2) & 1 - \frac{t}{2} \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

We shall now prove

Lemma 2.3. *The loop class of p'' is equal to zero if and only if $\Omega p''$ has a cross section.*

Proof. First, observe that this loop class is the based homotopy class of the map $\Phi'': \Omega(A, a_0) \rightarrow F'' = p''^{-1}(a_0)$ defined by $\Phi''(\omega) = \lambda''((b_0, a_0^*), \omega)(1) = (b_0, a_0^* * \omega)$ where $*$ denotes the usual path composition, and that $F'' = \{(b, \alpha) \in B \times A^I \mid \alpha(0) = k(b), \alpha(1) = a_0\}$ is equivalent to $B \cap_k EA$ by sending (b, α) to (b, α^{-1}) . Hence we infer that $[\Phi''] = 0$ if and only if the inclusion $i': F' = p'^{-1}(b_0) \rightarrow B \cap_k EA$ is nullhomotopic, relative to (b_0, a_0^*) . On the other hand, consider the following diagram



where $q: Q \rightarrow P_k$ is the fibration induced from p by p'' , and $s(b) = (b, k(b)^*)$. A simple verification shows that p' can be considered as being induced from q by s . Since s is a homotopy equivalence (used in „converting” k into the fibration p''), the map $s: B \cap_k EA \rightarrow Q: (b, \alpha) \rightarrow (b, k(b)^*, \alpha)$ is one too (by [2], (1.4)). Hence it follows that F' is contractible in $B \cap_k EA$ to (b_0, a_0^*) , relative to (b_0, a_0^*) if and only if $q^{-1}(b_0, a_0^*)$ is contractible in Q to (b_0, a_0^*, a_0^*) , relative to (b_0, a_0^*, a_0^*) which by Corollary 2.2 is equivalent to $\Omega p''$ having a right homotopy inverse, relative to a_0^* . Since $\Omega p''$ is a fibration with regular point (b_0, a_0^*) ([1], Prop. 2.2) this is equivalent to $\Omega p''$ having a cross section.

Before proving the main theorem in its general setting, we need the following

Lemma 2.4. *If $\xi = (E, p, B)$, $\xi' = (E', p', B)$ are fibrations with regular points e_0, e'_0 and if $f: (E, e_0) \rightarrow (E', e'_0)$ is a based fiber homotopy equivalence, then $[\xi] = 0$ if and only if $[\xi'] = 0$.*

Proof. It is sufficient to prove one implication. For instance let $[\xi'] = 0$, then we have to show that $[\xi] = 0$, i.e. that the map $\Phi: \Omega(B, b_0) \rightarrow F: \beta \rightarrow \lambda(e_0, \beta)(1)$ is nullhomotopic, relative to b_0^* .

Now the map $i' \circ (f|_F) \circ \Phi: \Omega(B, b_0) \rightarrow E'$ is clearly nullhomotopic, relative to b_0^* . Since $f|_F: F \rightarrow F'$ is a based homotopy equivalence the desired conclusion follows from Proposition 1.1.

Theorem 2.5. *Let $\xi = (E, p, B)$ be a fibration with regular point e_0 , then $[\xi] = 0$ if and only if Ωp has a cross section.*

Proof. Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad \bar{s} \quad} & P_p \\ p \downarrow & & \downarrow p'' \\ & \rightarrow B \leftarrow & \end{array}$$

obtained by converting p into a fibration p'' . By Dold's well known theorem ([4], Th. 6.1) s is a (based) fiber homotopy equivalence. Hence, by Lemma 2.4, $[\xi] = 0$ if and only if the loop class of p'' is zero, which by lemma 2.3, is equivalent to $\Omega p''$ having a cross section. This, of course, is now equivalent to Ωp having a cross section. Hence, the main theorem is proved.

Received September 17, 1977

Vrije Universiteit Brussel,
Department of Mathematics,
Brussels, Belgium

REFERENCES

1. Allaud G., *Remarks on the Loop Space of a Fibration*. Duke Math. J., **38**, 357—363 (1971).
2. Brown R., Heath P. R., *Cogluening Homotopy Equivalences*. Math. Z., **113**, 313—325 (1970).
3. Croom F. H., *Fiber Homotopy Type of Associated Loop Spaces*. Fund. Math., **68**, 257—260 (1970).
4. Dold A., *Partitions of Unity in the Theory of Fibrations*. Ann. of Math., **78**, 223—255 (1963).
5. Fadell E., *On Fiber Spaces*. Trans. of the AMS, **90**, 1—14 (1959).
6. Ganea T., *On Monomorphisms in Homotopy Theory*. Topology, **6**, 149—152 (1967).

CÎND ESTE EGALĂ CU ZERO LOOP CLASA UNEI FIBRAȚII ?

(Rezumat)

Se demonstrează o teoremă care asigură anularea clasei loop a unei fibrații, precizând și restringind condițiile date de Allaud [1], care a introdus noțiunea de loop clasă a unei fibrații Hurewicz.

CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE OPERATORILOR DE DERIVARE BAZĂ

DE

M. GONTINEAC și ELENA SÎRBU

În lucrarea [2] s-a definit o clasă de operatori liniari atașați șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, unele probleme legate de acești operatori fiind tratate în [2] și [3].

Amintim pentru început câteva definiții:

Definiția 1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un șir. Dacă a_n este termenul de rang n , numim derivată a lui a_n în modul $-p, q$ și o notăm cu $D_{-p,q} a_n = \sum_{i=-p}^q \alpha_i a_{n+1}$, cu coeficienții $\alpha_i \in R$ și satisfăcând condițiile:

$$(1) \quad \sum_{i=-p}^q \alpha_i = 0 \quad \text{și} \quad (1') \quad \sum_{i=-p}^q i \alpha_i = 1.$$

Definiția 2. Numim derivate bază ale lui a_0 operatorii notați d_n definiți prin

$$(2) \quad d_n a_0 = \frac{a_n - a_0}{n}, \quad \text{unde} \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

În lucrarea [2] s-a demonstrat că orice operator de derivare a lui a_0 se poate exprima ca o combinație liniară unică, cu suma coeficienților 1, de operatori bază d_n .

Să notăm cu δ_n^0 operatorul liniar definit prin

$$(3) \quad \delta_n^0 a_0 = a_n - a_{n-1}.$$

Vom arăta cu δ_n are același rol ca și derivatele bază d_n .

Propoziția 1. Orice operator de derivare a lui a_0 se poate exprima ca o combinație liniară unică cu suma coeficienților 1, de operatori de forma δ_n^0 .

Demonstrație. Fie $D_{p,q} a_0$ un operator de derivare a lui a_0 .

$D_{p,q} a_0 = \sum_{i=-p}^q \alpha_i a_i$, cu $\alpha_i \in R$ și satisfăcând condițiile (1) și (1'). Din (3)

avem $a_n = a_0 + \sum_{i=1}^n \delta_i^0 a_0$ și $a_{-m} = a_0 - \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j^0 a_0$,



$$\begin{aligned}
 D_{-p,q} a_0 &= \sum_{i=-p}^{-1} \alpha_i a_i + \alpha_0 a_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_i = \\
 &= \sum_{i=-p}^{-1} \alpha_i \left(a_0 - \sum_{j=0}^{i+1} \delta_j^0 a_0 \right) + \alpha_0 a_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(a_0 + \sum_{j=1}^i \delta_j^0 a_0 \right) = \\
 &= \left(\sum_{i=-p}^q \alpha_i \right) a_0 - \sum_{i=-p}^{-1} \sum_{j=0}^{i+1} \alpha_i \delta_j^0 a_0 + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^i \alpha_i \delta_j^0 a_0.
 \end{aligned}$$

Ținând cont de condiția (1) obținem

$$D_{-p,q} a_0 = - \sum_{i=-p}^{-1} \sum_{j=0}^{i+1} \alpha_i \delta_j^0 a_0 + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^i \alpha_i \delta_j^0 a_0;$$

calculând suma coeficienților și folosind (1') rezultă

$$\sum_{i=-p}^{-1} i \alpha_i + \sum_{i=1}^q i \alpha_i = \sum_{i=-p}^q i \alpha_i = 1.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observație. Între cele două sisteme de derivate d_n și δ_n are loc

$$(4) \quad d_n a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i a_0}{n}$$

și

$$(4') \quad \delta_n a_0 = n d_n a_0 - (n-1) d_{n-1} a_0 \quad \text{cu} \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

În lucrarea [3] s-au definit operatorii de derivare de ordin superior a lui a_0 , $D_{-p,q}^k a_0$. Acestor operatori li s-au atașat anumite funcții raționale $F_0^k(x)$.

Propoziția 2. Orice fracție rațională $F_0^2(x) = \sum_{i=-p}^q \alpha_i x_i$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ care satisface condițiile

$$(5) \quad F_0^2(1) = 0, \quad (5') \quad \frac{d}{dx} F_0^2(1) = 0 \quad \text{și} \quad (5'') \quad \frac{d^2}{dx^2} F_0^2(1) = 2,$$

se poate exprima ca o combinație liniară unică cu suma coeficienților unu, de funcțiile raționale bază

$$(6) \quad f_m^2(x) = \frac{(x-1)(x^m-1)}{m}, \quad \text{cu} \quad m \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad \text{și} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Demonstrație. Din (6) rezultă

$$(7) \quad x^q = (q-1)f_{q-1}^2(x) + (q-2)f_{q-2}^2(x) + \dots + f_1^2(x) + qx - (q-1)$$

cu $q \in \mathbb{N}$ și

(7') $X^{-p} = pf_{-p}^2(x) + (p-1)f_{-p+1}^2(x) + \dots + f_{-1}^2(x) - px + (p+1)$ cu $p \in N$.

Atunci

$$\begin{aligned} F_0^2(x) = & \alpha_{-p} [pf_{-p}^2(x) + (p-1)f_{-p+1}^2(x) + \dots + f_{-1}^2(x) - px + (p+1)] + \\ & + \alpha_{-p+1} [(p-1)f_{-p+1}^2(x) + (p-2)f_{-p+2}^2(x) + \dots + f_{-1}^2(x) - (p-1)x + \\ & + p] + \dots + \alpha_{-2} [2f_{-2}^2(x) + f_{-1}^2(x) - 2x + 3] + \alpha_{-1} [f_{-1}^2(x) - x + 2] + \\ & + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 [f_1^2(x) + 2x - 1] + \alpha_3 [2f_2^2(x) + f_1^2(x) + 3x - 2] + \\ & + \dots + \alpha_{q-1} [(q-2)f_{q-2}^2(x) + (q-3)f_{q-3}^2(x) + \dots + f_1^2(x) + (q-1)x - \\ & - (q-2)] + \alpha_q [(q-1)f_{q-1}^2(x) + (q-2)f_{q-2}^2(x) + \dots + f_1^2(x) + \\ & + qx - (q-1)] = p\alpha_{-p}f_{-p}^2(x) + (p-1)[\alpha_{-p} + \alpha_{-p+1}]f_{-p+1}^2(x) + \\ & + (p-2)[\alpha_{-p} + \alpha_{-p+1} + \alpha_{-p+2}]f_{-p+2}^2(x) + \dots + 2[\alpha_{-p} + \alpha_{-p+1} + \dots + \\ & + \alpha_{-3} + \alpha_{-2}]f_{-2}^2(x) + [\alpha_{-p} + \alpha_{-p+1} + \dots + \alpha_{-2} + \alpha_{-1}]f_{-1}^2(x) + [-p\alpha_{-p} - \\ & - (p-1)\alpha_{-p+1} - \dots - 3\alpha_{-3} - 2\alpha_{-2} - \alpha_{-1} + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + \\ & + (q-1)\alpha_{q-1} + q\alpha_q]x + (p+1)\alpha_{-p} + p\alpha_{-p+1} + \dots + 3\alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + \alpha_0 - \\ & - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \dots - (q-2)\alpha_{q-1} - (q-1)\alpha_q + [\alpha_q + \alpha_{q-1} + \dots \\ & \dots + \alpha_3 + \alpha_2]f_1^2(x) + 2[\alpha_q + \alpha_{q-1} + \dots + \alpha_3]f_2^2(x) + \dots \\ & \dots + (q-2)[\alpha_q + \alpha_{q-1}]f_{q-2}^2(x) + (q-1)\alpha_q f_{q-1}^2(x). \end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{i=-p}^q i\alpha_i = \frac{d}{dx} F_0^2(1) = 0,$$

$$\sum_{i=-p}^q (1-i)\alpha_i = \sum_{i=-p}^q \alpha_i - \sum_{i=-p}^q i\alpha_i = F_0^2(1) - \frac{d}{dx} F_0^2(1) = 0.$$

Deci

$$F_0^2(x) = \sum_{i=-p}^{-1} \sum_{j=-p}^i (-i)\alpha_j f_i^2(x) + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^q i\alpha_j f_i^2(x).$$

Evaluăm suma coeficienților :

$$\begin{aligned} S = & \sum_{i=-p}^{-1} \sum_{j=-p}^i (-i)\alpha_j + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^q i\alpha_j = \\ = & \alpha_{-p} [p + (p-1) + (p-2) + \dots + 3 + 2 + 1] + \alpha_{-p+1} [(p-1) + \\ & + (p-2) + \dots + 3 + 2 + 1] + \dots + \alpha_{-3} [3 + 2 + 1] + \alpha_{-2} [2 + 1] + \\ & + \alpha_{-1} + \alpha_2 + \alpha_3 [1 + 2] + \dots + \alpha_{q-1} [1 + 2 + 3 + \dots + (q-2)] + \\ & + \alpha_q [1 + 2 + 3 + \dots + (q-1)]. \end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S = \frac{p(p+1)}{2} \alpha_{-p} + \frac{(p-1)p}{2} \alpha_{-p+1} + \frac{(p-2)(p-1)}{2} \alpha_{-p+2} + \dots +$$

$$+ \frac{3(3+1)}{2} \alpha_{-3} + \frac{2(2+1)}{2} \alpha_{-2} + \frac{1+1}{2} \alpha_{-1} + \frac{(q-1)q}{2} \alpha_q +$$

$$+ \frac{(q-2)(q-1)}{2} \alpha_{q-1} + \frac{(q-3)(q-2)}{2} \alpha_{q-2} + \dots + \frac{2 \cdot 3}{2} \alpha_3 + \frac{1 \cdot 2}{2} \alpha_2,$$

$$2S = \frac{d^2}{dx^2} F_0^2(1) - \frac{d}{dx} F_0^2(1) = 2.$$

Deci $S = 1$ și propoziția 2 este demonstrată.

Observația 1. Demonstrația Propoziției 2 față de demonstrația Propoziției 6 din [3], cu care este similară, prezintă avantajul că pune în evidență coeficienții combinației liniare.

Observația 2. O altă bază pentru F_0^2 se poate lua

$$(8) \quad \varphi_m = \frac{(x^{-1} - 1)(x^m - 1)}{m}, \quad m \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad \text{și} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Primită la 18 decembrie 1977

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Climescu Al., Gontineac M., Motreanu D., *O clasă de operatori și ecuații corespunzătoare*. Bul. Inst. polit. Iași, XX (XXIV), 3-4, s. I (1974).
2. Climescu Al., Gontineac M., *O clasă de operatori și ecuații corespunzătoare. (I) Operatori de derivare de ordin unu*. Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVI) 3-4, s. I (1976).
3. Climescu Al., Gontineac M., *O clasă de operatori și ecuații corespunzătoare. (II) Operatori de derivare de ordin superior*. Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3-4, s. I (1977).

SOME PROPERTIES OF THE BASIC DERIVATIVE OPERATORS

(Summary)

One proves some properties of first and second order derivative operators.

SOBRE CONJUNTOS NUBILOS E PROCESSOS OTIMAIS GENERALIZADOS

POR

UBIRATAN D'AMBROSIO

1. Introdução. A partir de 1965, Lofti A. Zadeh e outros vêm desenvolvendo uma teoria baseada na noção de conjuntos *núbilos* (*fuzzy* em inglês e *flou* em francês), e várias aplicações têm sido propostas. Um conjunto *núbilo* é definido por uma função *pertinência* $\mu(x)$ que toma valores entre 0 (*não pertinência* no sentido usual) e 1 (*pertinência* no sentido usual). Os valores intermediários são interpretados como *pertinência parcial*.

Neste trabalho apresentamos uma interpretação em termos de conjuntos *núbilos* para as curvas generalizadas introduzidas em 1937 por L.C. Young como funcionais lineares não negativos no espaço das funções contínuas definidas em $R^m \times S^m$, onde S^m é a esfera unitária no R^m . Para a interpretação proposta, utilizamos uma representação de curvas generalizadas como um par $(x(t), \mu(t))$, onde $x(t)$ é o conjunto suporte da curva generalizada e $\mu(t)$ é uma medida que exprime a distribuição de direções que, a cada instante, generaliza a noção de tangente, noção esta muitas vezes restritiva em processos de otimização. A interpretação proposta baseia-se no teorema de representação de Young, que afirma a existência de uma aplicação lipschitziana e de um funcional linear satisfazendo certas condições, associados a todo funcional linear nas condições acima.

2. Os conjuntos *núbilos*. Seja X um conjunto. Um conjunto *núbilo* sobre X é uma aplicação $\mu: X \rightarrow [0, 1]$. Sub-conjuntos ordinários de X são aplicações $\mu: X \rightarrow \{0, 1\}$.

Se μ e ν são dois conjuntos *núbilos* sobre X , define-se *junção* de μ e ν como o conjunto *núbilo* definido por

$$\gamma: x \in X \rightarrow \sup \{ \mu(x), \nu(x) \}$$

e usa-se a notação $\mu \vee \nu$. Analogamente, diz-se que μ é parte de ν , e usa-se a notação $\mu \subset \nu$, se para todo $x \in X$ tem-se $\mu(x) \leq \nu(x)$. Pode-se estender todas as noções da teoria usual de conjuntos para conjuntos *núbilos*. Define-se ainda uma estrutura topológica para conjuntos *núbilos* sobre X , bem como aplicações *núbilas*, e a noção de continuidade das mesmas. Para detalhes, referimos o leitor à tese de Niamanto Diarra [1], que apresenta um tratamento sistemático e completo de teoria dos conjuntos *núbilos*, extendendo resultados de L. A. Zadeh e de seus colaboradores.

3. As curvas de L. C. Young. A definição de curva elementar que apresentamos leva em consideração essencialmente o fato de uma curva atribuir valores aos integrandos básicos do cálculo das variações, numa interpretação dual do cálculo das variações. Em outros termos, uma curva age nos integrandos típicos do cálculo das variações, mediante seus funcionais usuais representados por integrais.

Sejam curvas parametrizadas

$$x: [a, b] \rightarrow R^m, \quad x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)).$$

Dizer que $x(t)$ é contínua, ou AC ou L_1 , significa que cada componente $x^i: [a, b] \rightarrow R$ é contínua, ou AC ou L_1 , etc.

O problema típico do cálculo das variações, chamado *problema mais simples do Cálculo das Variações*, em forma paramétrica é minimizar o funcional

$$J(\gamma) = \int_a^b f(x(t), x'(t)) dt$$

na classe de curvas admissíveis γ de equações paramétricas $x(t)$.

Seja S^m a esfera unitária do R^m , e $\Sigma = R^m \times S^m$, e seja $C(\Sigma)$ o espaço das funções contínuas em Σ . Um *integrando admissível* é uma aplicação

$$f: R^m \times R^m \rightarrow R$$

tal que: i) f é contínua; ii) $f(x, kp) = kf(x, p)$ para todo $k \geq 0$.

Chamaremos *curva elementar* todo funcional linear L em $C(\Sigma)$ que admite uma representação do tipo

$$L(f) = \int_a^b \tilde{f}(x(t), x'(t)) dt,$$

onde $\tilde{f}$ é a extensão de f a um integrando admissível, e $x(t)$ é uma função AC em $[a, b]$ para a qual existe uma constante $K > 0$ tal que $|x'(t)| = K$ quase sempre. Notemos que esta noção de curva elementar exprime a dualidade inerente ao processo variacional, que se manifesta pela ação da curva sobre o integrando. Para maiores detalhes ver o livro de L. C. Young [2].

Uma *curva de Young* é um funcional linear L em $C(\Sigma)$ que seja o limite fraco de uma sequência (L_n) de curvas elementares com suporte, no sentido de funcional, em $R^m \cap B(0, \rho)$, para algum ρ fixado. Define-se o comprimento de L como a norma do funcional, isto é, $\|L\|$. Tais curvas foram introduzidas por L. C. Young em [3]. Para detalhes ver [2] e [4].

4. Uma interpretação em termos de conjuntos núbilos. O desenvolvimento da teoria de Young feito por E. J. McShane [5] permitem naturalmente uma interpretação das curvas generalizadas, e igualmente dos processos otimais em regime deslizante e outras generalizações semelhantes do Cálculo das Variações em termos de conjuntos núbilos. De fato, o principal teorema de representação da teoria de Young (ver [4]), diz que dada uma curva de Young L , existem (a) uma aplicação $x: [0, 1] \rightarrow R^m$

satisfazendo uma condição de Lipschitz; (b) para quase todo $t \in [0, 1]$ um funcional linear não negativo M_t definido em $C(\Sigma)$ tal que

(i) M_t tem suporte em $x(t)$, como funcional, para quase todo $t \in [0, 1]$;

(ii) $\|M_t\| = \|L\|$;

(iii) $L(f) = \int_0^1 M_t(f) dt$, para todo $f \in C(\Sigma)$;

(iv) $(M_t(x^1(t), \dots, M_t(x^m(t))) = x'(t)$.

Mediante tal representação, pode-se associar ao conjunto de pontos $X = \{x(t) : t \in [0, 1], x(t) \text{ lipschitziana}\}$ uma aplicação $\mu : X \rightarrow [0, 1]$, mediante um funcional linear não negativo definido em $C(\Sigma)$, devidamente normalizado. Usando a parametrização $t \in [0, 1]$ teremos entes $(x(t), \mu(t))$ com ação sobre integrandos admissíveis e que são de fato conjuntos núbilos. Tais entes constituem uma classe de curvas generalizadas, para as quais as noções usuais da teoria das curvas podem ser estendidos. Detalhes serão publicados proximamente.

Esta interpretação da teoria de Young responde, numa linguagem adequada, às ideias originais de Young, publicadas em 1933, e que tinham inspiração nas então recentes teorias da mecânica quântica. De fato, a relação íntima entre a teoria de Young e a teoria das distribuições, permitiria mesmo uma interpretação destas em termos de conjuntos núbilos, o que nos parece natural, e mesmo do ponto de vista formal, conveniente para o estudo da análise numa conceituação mais ampla e adequada para o tratamento de fenômenos não linearizáveis.

Recebido 24 I 1978

Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e
Ciência da Computação, Campinas, Brasil

REFERÊNCIAS

1. Diarra N., *A propos des ensembles flous*. Thèse de doctorat, Bamako, 1975.
2. Young L. C., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1969.
3. Young L. C., *Generalized Curves and the Existence of an Absolute Minimum in the Calculus of Variations*. C. R. de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 30, 212—234 (1937).
4. D'Ambrosio U., *Cálculo das Variações*. Monografias de Matemática Pura e Aplicada, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1977.
5. McShane E. J., *Generalized Curves*. Duke Math. J., 6, 513—536 (1940).

ASUPRA MULȚIMILOR VAGI ȘI A PROCESELOR OPTIMALE GENERALIZATE

(Rezumat)

Se prezintă o interpretare în termeni de mulțimi vagi a curbelor generalizate introduse în [3] de L. C. Young ca funcționale liniare nenegative în spațiul funcțiilor continue definite în $R^m \times S^m$, în care S^m este sfera unitate în R^m . Interpretarea, bazată pe teorema de reprezentare a lui Young, vizează aplicații la studiul proceselor de optimizare.

estendendo uma condição de Lipschitz; (b) para quase todo $x \in [0, 1]$ uma função linear não negativa M_x definida em $C([2])$ tal que

$$(i) \quad M_x \text{ tem suporte em } [0, 1] \text{ como função, para quase todo } x \in [0, 1];$$

$$(ii) \quad M_x(y) = y \text{ para todo } x \in [0, 1];$$

(iii) $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.
 Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definindo M_x para cada $x \in [0, 1]$ como acima, podemos associar ao conjunto de pontos M_x uma função linear não negativa definida em $C([2])$ denotada por M_x . Então, a função M_x é uma função linear não negativa definida em $C([2])$ tal que $M_x(y) = y$ para todo $x \in [0, 1]$.

CVASI-CONEXIUNI PE SPAȚII RIEMANN PARTICULARE

DE

ELENA VAMANU

1. **Introducere.** Într-o serie de lucrări apărute în ultimele decenii sînt abordate diverse proprietăți geometrice ale varietății spațiu-timp V_4 din relativitatea generală [1], [2], [8] etc.

În această Notă se consideră varietatea spațiu-timp V_4 dotată cu conexiunea spinorială introdusă de Lichnerowicz și cu o structură aproape-produs φ .

Existența cîmpului de tensori φ și a conexiunii spinoriale permite introducerea pe varietate a unei perechi de cvasi-conexiuni. Această pereche de cvasi-conexiuni se bucură de o serie de proprietăți ce sînt studiate în lucrarea de față.

2. **Cvasi-conexiuni pe spații cu structură aproape produs.** Fie V_n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞ , cu n dimensiuni, dotată cu o structură aproape-produs definită de cîmpul de tensori φ . Notăm prin F algebra funcțiilor diferențiabile de clasă C^∞ pe V_n și prin L modulul cîmpurilor de vectori pe V_n .

Definiția 1. Numim cvasi-conexiune pe V_n o lege D care asociază oricărui vector $X \in L$, reprezentarea liniară D_X a spațiului L în el însuși dată de următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} 1' \quad D_{fX+gY} &= fD_X + gD_Y \\ 2' \quad D_X fY &= fD_X Y + \delta f(X) Y \end{aligned}$$

pentru orice $f, g \in F$, $X, Y \in L$ și δ o derivare de grad 1 a algebrei formelor exterioare pe V_n [6].

O cvasi-conexiune D pe V_n induce o cvasi-conexiune D_U pe orice vecinătate de coordonate U .

Fie (U, x^α) vecinătatea de coordonate considerată mai sus cu reper și coreper natural. Notăm

$$(1) \quad D_\alpha = (D_U) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

și definim pe U funcțiile $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ date de

$$(2) \quad D_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho};$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ se numesc coeficienții cvasi-conexiunii D .

Dacă $x^{\alpha'}$ este un alt sistem de coordonate pe U , avem

$$(3) \quad D_{\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \right) = \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\rho'} \frac{\partial}{\partial x^{\rho'}}.$$

Folosind axiomele 1' și 2', obținem

$$(4) \quad \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\rho'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho + \varphi_{\beta'}^{\rho'} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \right),$$

legea de transformare a coeficienților de evasi-conexiune [6].

Se poate încă defini o derivare covariantă în raport cu evasi-conexiunea D , notată D_X [6].

Unei evasi-conexiuni D pe V_n i se pot asocia tensorii de torsione și de curbură cu ajutorul operatorilor :

$$(5) \quad T(X, Y) = D_Y X - D_X Y - \varphi([X, Y]) \text{ pentru orice } X, Y \in L$$

$$(6) \quad R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{\varphi([X, Y])} \text{ pentru orice } X, Y \in L$$

și [,] operația croșet.

În vecinătatea de coordonate (U, x^α) acești tensori au componentele date de :

$$(7) \quad T_{\alpha\beta}^\rho = \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho + \varphi_{[\alpha}^\lambda \varphi_{\beta]}^\mu \partial_\lambda \varphi_\mu^\rho$$

și respectiv

$$(8) \quad R_{\beta, \lambda \mu}^\alpha = \Gamma_{\epsilon \lambda}^\alpha \Gamma_{\beta \mu}^\epsilon - \Gamma_{\epsilon \mu}^\alpha \Gamma_{\beta \lambda}^\epsilon + \varphi_\lambda^\epsilon \partial_\epsilon \Gamma_{\beta \mu}^\alpha - \varphi_\mu^\epsilon \partial_\epsilon \Gamma_{\beta \lambda}^\alpha + \Gamma_{\beta \epsilon}^\alpha \varphi_{[\lambda}^\rho \varphi_{\mu]}^\theta \partial_\rho \varphi_\theta^\epsilon,$$

∂ — simbolul derivatei parțiale.

Cvasi-conexiunii D putem să-i asociem alte 2 evasi-conexiuni

$$(9) \quad D'_X Y = D_Y X + \varphi([X, Y]) - \text{evasi-conexiunea transpusă},$$

$$(10) \quad m_{D_X Y} = \frac{1}{2} (D_X Y + D'_X Y) - \text{evasi-conexiunea medie}.$$

Dacă ∇ este o conexiune liniară pe V_n ei i se poate asocia o evasi-conexiune 1D definită prin

$$(11) \quad {}^1D_X = \nabla \varphi X$$

numită evasi-conexiune asociată unei conexiuni liniare.

Dacă $\gamma_{\alpha\beta}^\rho$ sînt coeficienții conexiunii ∇ și ${}^1\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ cei ai evasi-conexiunii 1D , din (11) rezultă :

$$(12) \quad {}^1\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \gamma_{\alpha\theta}^\rho \varphi_\beta^\theta.$$

Fie 1T , 1R , t , τ tensorii de torsione și de curbură ai evasi-conexiunii 1D și respectiv ai conexiunii ∇ . Componentele acestor tensori sînt legate prin relațiile :

$$(13) \quad \varphi_\alpha^{\beta'} \Gamma_{\lambda \mu}^\alpha \varphi_\theta^\lambda \varphi_\epsilon^\mu = t_{\theta \epsilon}^\beta + \varphi_\alpha^\beta (\nabla_\theta \varphi_\epsilon^\alpha - \nabla_\epsilon \varphi_\theta^\alpha),$$

$$(14) \quad {}^1R_{\beta, \lambda \mu}^\alpha = \tau_{\beta, \rho \theta}^\alpha \varphi_\lambda^\rho \varphi_\mu^\theta.$$

Dacă, în plus V_n este un spațiu Riemann cu metrica definită de tensorul g în [6] se demonstrează

Teorema 1. *Pe un spațiu Riemann V_n există o evasi-conexiune unică care satisface condițiile :*

a) este fără torsione ;

b) derivata covariantă a tensorului metric g în raport cu această evasi-conexiune este nulă.

Cvasi-conexiunea dată de această teoremă o vom numi evasi-conexiune riemanniană.

Pentru detalii în legătură cu chestiunile prezentate mai sus a se vedea lucrările autorului [4], [5], [6].

3. Algebra de deformare a două evasi-conexiuni [7]. Fie 1D și 2D două evasi-conexiuni pe V_n .

Definiția 2. Numim operator de curbură mixtă al perechii $({}^1D, {}^2D)$ operatorul

$$(15) \quad \rho(X, Y) = \frac{1}{2} \{[{}^1D_X, {}^2D_Y] + [{}^2D_X, {}^1D_Y] - {}^1D_{\varphi([X, Y])} - {}^2D_{\varphi([X, Y])}\}$$

pentru orice $X, Y \in L$. Fie

$$(16) \quad \mathcal{D}_X = \frac{1}{2} ({}^1D_X + {}^2D_X) - \text{evasi-conexiunea medie a perechii } ({}^1D, {}^2D).$$

Între curburile cvasi-conexiunilor 1D , 2D , $\mathcal{D}$ și curbura mixtă a perechii $({}^1D, {}^2D)$ există relația

$$(17) \quad 2\rho(X, Y) = 4\mathcal{Q}(X, Y) - {}^1R(X, Y) - {}^2R(X, Y),$$

oricare ar fi $X, Y \in L$, $\mathcal{Q}(X, Y)$, ${}^1R(X, Y)$, ${}^2R(X, Y)$ fiind câmpurile de operatori care dau curburile cvasi-conexiunilor $\mathcal{D}$, 1D și 2D respectiv. Considerăm acum operatorul

$$(18) \quad \tau_X = {}^2D_X - {}^1D_X$$

numit operator de deformare al perechii $({}^1D, {}^2D)$.

Cu ajutorul operatorului τ_X se poate defini o operație între câmpurile de vectori din L prin

$$(19) \quad X \times Y = \tau_X Y, \quad \forall X, Y \in L$$

numită produs [7].

Se verifică faptul că L este algebră în raport cu operația (19), numită algebra de deformare a perechii $({}^1D, {}^2D)$ [7].

În fine, mai definim operatorul

$$(20) \quad K(X, Y) = \frac{1}{4} [\tau_X, \tau_Y].$$

În [7] se demonstrează formulele :

$$(21) \quad 2\rho(X, Y) + 4K(X, Y) = {}^1R(X, Y) + {}^2R(X, Y),$$

$$(22) \quad \rho(X, Y) + K(X, Y) = \mathcal{Q}(X, Y),$$

$$(23) \quad X \times Y - Y \times X = {}^2T(X, Y) - {}^1T(X, Y),$$

$$(24) \quad X \times Y + Y \times X = 2({}^{m_2}D_X Y - {}^{m_1}D_X Y),$$

${}^{m_1}D$ și ${}^{m_2}D$ fiind cvasi-conexiunile medii asociate lui 1D respectiv 2D ;

$$(25) \quad X \times (Y \times Z) - Y \times (X \times Z) = 4K(X, Y)Z.$$

Din formulele (21)–(25) rezultă o serie de proprietăți pentru algebra L [7].

Tot în [7] se demonstrează

Teorema 2. *O condiție necesară și suficientă ca cvasiconexiunile 1D și 2D să fie complet reductibile este ca cvasi-conexiunea medie $\mathcal{D}$ a perechii $({}^1D, {}^2D)$ să fie complet reductibilă și produsul definit mai sus să satisfacă proprietatea*

$$(26) \quad X \times \varphi Y = \varphi(X \times Y) \text{ oricare ar fi } X, Y \in L.$$

4. Cvasi-conexiunea asociată unei conexiuni spinoriale. În continuare presupunem că V_n este varietatea spațiu-timp din relativitatea generală, deci $n=4$, φ -tensorul structurii aproape produs și g -tensorul metric. Avem

$$(27) \quad \varphi_\beta^\alpha \varphi_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3.$$

Tensorului φ i se poate asocia tensorul simetric covariant $\varphi_{\alpha\beta}$ dat de

$$(28) \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^\gamma \varphi_{\gamma\beta}.$$

Fie ∇ conexiunea riemanniană pe V_4 de coeficienți $\gamma_{\alpha\beta}^c$ și $p_\alpha = (p_{\alpha b}^a)$, $a, b, c = 1, 2, 3, 4$, un sistem de matrice Dirac pe V_4 , adică

$$(29) \quad p_\alpha p_\beta + p_\beta p_\alpha = -2g_{\alpha\beta}e,$$

e —matricea unitate de ordin 4.

În anumite condiții precizate în [2] conexiunii ∇ i se poate asocia o conexiune spinorială σ dată de

$$(30) \quad \sigma_{b\rho}^a = -\frac{1}{4}\gamma_{\beta\rho}^\alpha p_{\alpha c}^a p_b^{\beta c}, \quad p^\beta = g^{\beta\alpha}p_\alpha,$$

numită conexiunea spinorială indusă de conexiunea ∇ .

Legea de transformare a cantităților $\sigma_{b\rho}^a$ la o schimbare de reper spinorial este

$$(31) \quad \sigma_{b'\rho'}^{a'} = \lambda_{a'}^{a'} \lambda_{b'}^b A_{\rho'}^\rho \sigma_{b\rho}^a + \lambda_{a'}^{a'} \partial_{\rho'} \lambda_{b'}^b,$$

cu $(\lambda_{a'}^a), (\lambda_{b'}^b) \in$ grupului spinorial $\text{Spin}(4)$ și $(A_{\rho'}^\rho) \in$ grupului Lorentz $L(4)$, [2].

Definim cantitățile

$$(32) \quad \Gamma_{b\rho}^a = \sigma_{b\rho}^a \varphi_\rho^\alpha.$$

Folosind (31) și faptul că φ este tensor de tip (1.1) obținem legea de transformare a cantităților

$$(33) \quad \Gamma_{b'\rho'}^{a'} = \lambda_{a'}^{a'} \lambda_{b'}^b A_{\rho'}^\rho \Gamma_{b\rho}^a + \lambda_{a'}^{a'} \varphi_{\rho'}^\alpha \partial_{\alpha'} \lambda_{b'}^b.$$

Din (33) rezultă că $\Gamma_{b\rho}^a$ sînt coeficienții unei cvasi-conexiuni D . Deci, conexiunii spinoriale σ i-am asociat o cvasi-conexiune D pe care o vom numi *cvasi-conexiune spinorială*. Pe de altă parte avem cvasi-conexiunea 1D asociată conexiunii riemanniene ∇ de coeficienți ${}^1\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ dați de

$$(34) \quad {}^1\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \gamma_{\alpha\beta}^\gamma \varphi_\beta^\epsilon.$$

Din (30), (32) și (34) rezultă legătura între coeficienții cvasiconexiunilor D și 1D ,

$$(35) \quad \Gamma_{b\beta}^a = -\frac{1}{4} {}^1\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma p_{\rho c}^a p_b^{\beta c}.$$

Un calcul simplu ne dă și legătura între tensorii de curbura R , 1R ai acestor două cvasi-conexiuni

$$(36) \quad R_{b,\lambda\mu}^a = -\frac{1}{4} {}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha p_{\alpha c}^a p_b^{\beta c}.$$

Se știe că matricele Dirac p_α determină spin-tensorul fundamental al varietății, a cărei derivată covariantă în raport cu perechea de conexiuni (σ, ∇) este nulă.

Să calculăm derivata covariantă a spin-tensorului fundamental $p_{\alpha b}^a$ în raport cu perechea de cvasi-conexiuni $(D, {}^1D)$. Avem

$$\begin{aligned} D_\alpha p_{\beta b}^a &= \varphi_\alpha^\rho \partial_\rho p_{\beta b}^a + \Gamma_{c\alpha}^a p_{\beta b}^c - \Gamma_{b\alpha}^c p_{\beta c}^a - {}^1\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p_{\gamma b}^a = \\ &= \varphi_\alpha^\rho (\partial_\rho p_{\beta b}^a + \sigma_{c\rho}^a p_{\beta b}^c - \sigma_{b\rho}^c p_{\beta c}^a - \gamma_{\beta\rho}^\epsilon p_{\epsilon b}^a). \end{aligned}$$

Dar, paranteza reprezintă derivata covariantă a spin-tensorului fundamental în raport cu perechea de conexiuni (σ, ∇) și care după cum se știe este zero. Rezultă

$$(37) \quad D_\alpha p_{\beta b}^a = 0.$$

În [8] au fost introduse matricele

$$(38) \quad h_\beta = p_\alpha \varphi_\beta^\alpha$$

și s-a demonstrat că și h_β constituie un sistem de matrice Dirac. Matricele h_β determină spin-tensorul $h_{\beta b}^a$. Am văzut mai sus că $D_\alpha p_{\beta b}^a = 0$ în raport cu perechea $(D, {}^1D)$; calculând $D_\alpha h_{\beta b}^a$ obținem

$$(39) \quad D_\alpha h_{\beta b}^a = p_{\rho b}^a {}^1D_\alpha \varphi_\beta^\rho$$

și deci, în general, $D_\alpha h_{\beta b}^a \neq 0$.

Punem acum o problemă analogă cu cea din [8]: dată cvasi-conexiunea spinorială D să găsim cvasi-conexiunea 2D astfel încât derivata covariantă a spin tensorului $h_{\beta b}^a$ în raport cu perechea $(D, {}^2D)$ să fie nulă, adică

$$(40) \quad \varphi_\beta^\rho \partial_\rho h_{\alpha b}^a + \Gamma_{c\beta}^a h_{\alpha b}^c - \Gamma_{b\beta}^c p_{\alpha c}^a - {}^2\Gamma_{\alpha\beta}^c h_{\rho b}^a = 0.$$

Din (40) ținând cont că h_α sînt matrice Dirac, rezultă imediat

$$(41) \quad {}^2\Gamma_{\alpha\beta}^c = {}^1\Gamma_{\alpha\beta}^c + \varphi_\beta^\varepsilon {}^1D_\beta \varphi_\alpha^\varepsilon.$$

Deci, cvasi-conexiunea 2D este unică și are coeficienții dați de (41). În concluzie, dacă pe V_4 dotată cu o structură aproape-produs, există o conexiune spinorială indusă de conexiunea riemanniană, putem determina o pereche de cvasi-conexiuni $({}^1D, {}^2D)$ ai căror coeficienți sînt legați prin relația (41).

5. Proprietăți ale perechii de cvasi-conexiuni $({}^1D, {}^2D)$. P_1 . Tensorii de torsiune ai celor 2 cvasi-conexiuni sînt dați de relațiile:

$$(42) \quad {}^1T_{\beta\gamma}^\alpha = \varphi_\beta^\alpha ({}^1D_\beta \varphi_\gamma^\rho - {}^1D_\gamma \varphi_\beta^\rho),$$

$$(43) \quad {}^2T_{\beta\gamma}^\alpha = 0.$$

Deci, cvasi-conexiunea 2D este fără torsiune.

P_2 . Tensorii de curbura ai celor 2 cvasi-conexiuni sînt legați prin relația

$$(44) \quad {}^2R_{\beta, \lambda\mu}^\alpha = \varphi_\beta^\alpha \varphi_\lambda^\rho {}^1R_{\rho, \lambda\mu}^\alpha.$$

Deci, anularea unuia dintre tensorii de curbura atrage anularea celui alt și reciproc.

P_3 . Avem

$$(45) \quad {}^1D_\alpha g_{\beta\gamma} = {}^2D_\alpha g_{\beta\gamma} = 0.$$

Din (43) și (45) rezultă că cvasi-conexiunea 2D determinată mai sus este cvasi-conexiunea riemanniană a spațiului V_4 .

P_4 . Fie $\mathcal{D}$ cvasi-conexiunea medie a perechii (1D , 2D); să demonstrăm că cvasi-conexiunea $\mathcal{D}$ este complet reductibilă.

În adevăr, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha \varphi_Y^\beta &= \varphi_\alpha^\beta \partial_\rho \varphi_Y^\beta + {}^m\Gamma_{\rho\alpha}^\beta \varphi_Y^\rho - {}^m\Gamma_{Y\alpha}^\rho \varphi_\rho^\beta = \varphi_\alpha^\beta \partial_\rho \varphi_Y^\beta + \left({}^1\Gamma_{\rho\alpha}^\beta + \frac{1}{2} \varphi_\theta^\beta {}^1D_\alpha \varphi_\rho^\theta \right) \varphi_Y^\rho - \\ &- \left({}^1\Gamma_{Y\alpha}^\rho + \frac{1}{2} \varphi_\theta^\rho {}^1D_\alpha \varphi_Y^\theta \right) \varphi_\rho^\beta = {}^1D_\alpha \varphi_Y^\beta - \frac{1}{2} {}^1D_\alpha \varphi_Y^\beta - \frac{1}{2} {}^1D_\alpha \varphi_Y^\beta = 0. \end{aligned}$$

Cum $\mathcal{D}_\alpha \varphi_Y^\beta = 0$, rezultă $\mathcal{D}$ complet reductibilă.

P_5 . Dacă $N_{\beta\gamma}^\alpha$ este tensorul de torsiune al structurii aproape-produs (tensorul lui Nijenhuis), se știe că

$$(46) \quad N_{\beta\gamma}^\alpha = \varphi_\beta^\alpha (\partial_\rho \varphi_Y^\alpha - \partial_Y \varphi_\rho^\alpha) - \varphi_Y^\alpha (\partial_\rho \varphi_\beta^\alpha - \partial_\beta \varphi_\rho^\alpha).$$

Folosind (7), (27), (42) și (46) obținem

$$(47) \quad N_{\beta\gamma}^\alpha = 2\varphi_Y^\rho \Phi_3 {}^1T_{\beta\rho}^\alpha,$$

cu Φ_3 — operator Obata definit prin [3], $\Phi_3 {}^1T_{\beta\rho}^\alpha = \frac{1}{2} ({}^1T_{\beta\rho}^\alpha + \varphi_\beta^\epsilon \varphi_\rho^\theta {}^1T_{\epsilon\theta}^\alpha)$.

Obținem astfel

Teorema 3. O condiție necesară și suficientă ca structura aproape-produs a varietății V_4 să fie integrabilă este dată de

$$(48) \quad \Phi_3 {}^1T_{\beta\gamma}^\alpha = 0.$$

P_6 . Dacă ρ este tensorul curburii mixte al perechii (1D , 2D) și $\mathcal{R}$, 1R , 2R tensorii de curbura ai cvasi-conexiunilor $\mathcal{D}$, 1D , 2D , folosind (17) și (44) rezultă

$$(49) \quad 2\mathcal{R}_{\beta,\lambda\mu}^\alpha = \rho_{\beta,\lambda\mu}^\alpha + \Phi_1 {}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha,$$

unde Φ_1 — operator Obata definit prin [3], $\Phi_1 {}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha = \frac{1}{2} ({}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha + \varphi_\beta^\epsilon \varphi_\lambda^\rho {}^1R_{\epsilon\rho}^\alpha)$. Deci

Teorema 4. O condiție necesară și suficientă ca cvasi-conexiunea medie $\mathcal{D}$ să fie fără curbura este ca

$$(50) \quad \rho_{\beta,\lambda\mu}^\alpha = \Phi_1 {}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha.$$

P_7 . Considerăm algebra de deformare a perechii (1D , 2D) despre care a fost vorba în prima parte a lucrării.

Din formulele (21) și (22) rezultă

$$(51) \quad \rho_{\beta,\lambda\mu}^\alpha + 2K_{\beta,\lambda\mu}^\alpha = \Phi_1 {}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha,$$

$$(52) \quad \rho_{\beta,\lambda\mu}^\alpha + K_{\beta,\lambda\mu}^\alpha = \mathcal{R}_{\beta,\lambda\mu}^\alpha.$$

Prin scădere, obținem

$$(53) \quad K_{\beta,\lambda\mu}^\alpha = \Phi_1 {}^1R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha - \mathcal{R}_{\beta,\lambda\mu}^\alpha.$$

Deci $K_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha} = 0$ dacă și numai dacă $\Phi_1 {}^1R_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha} = \mathcal{R}_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha}$. Formula ne conduce la

$$(54) \quad X \times Y - Y \times X = - {}^1T(X, Y).$$

Folosind aceste rezultate și cele date în § 3 referitoare la algebra L de deformare a două cvasi-conexiuni distincte 1D , 2D obținem următoarele concluzii:

a) Algebra L nu este comutativă; în adevăr $X \times Y = Y \times X$ dacă și numai dacă ${}^1T(X, Y) = 0$, ori aceasta atrage faptul că cele două cvasi-conexiuni coincid.

b) Algebra L este anticomutativă dacă și numai dacă cvasi-conexiunile medii asociate lui 1D și 2D coincid.

c) În algebra L produsul satisface proprietatea

$$(55) \quad X \times (Y \times Z) = Y \times (X \times Z)$$

dacă și numai dacă tensorii de curbură ai cvasi-conexiunilor $\mathcal{D}$ și 1D satisfac proprietatea

$$(56) \quad \mathcal{R}_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha} = \Phi_1 {}^1R_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha}.$$

d) Algebra L este simultan anticomutativă și asociativă dacă sînt verificate simultan condițiile b) și c).

e) Algebra L este o algebră Lie dacă și numai dacă 1D și 2D au aceleași cvasi-conexiuni medii și

$$(57) \quad \Phi_1 {}^1R_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha} + \Phi_1 {}^1R_{\lambda, \mu \beta}^{\alpha} + \Phi_1 {}^1R_{\mu, \beta \lambda}^{\alpha} = \mathcal{R}_{\beta, \lambda \mu}^{\alpha} + \mathcal{R}_{\lambda, \mu \beta}^{\alpha} + \mathcal{R}_{\mu, \beta \lambda}^{\alpha}.$$

f) **Teorema 5.** O condiție necesară și suficientă pentru ca cvasi-conexiunile 1D și 2D să fie complet reductibile este ca produsul definit mai sus să se bucure de proprietatea

$$(58) \quad X \times \varphi Y = \varphi(X \times Y), \text{ pentru orice } X, Y \in L.$$

Observație. Teorema 5 rezultă din teorema 2 și proprietatea P_4 .

Primită la 23 iunie 1976

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Guy R., *Sur la dérivation covariante des spineurs*. Rend. Acad. Naz. Lincei, Sci. Fiz. Mat. e Nat. (8), 29, 512 (1958).
2. Lichnerowicz A., *Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale*. Bull. Soc. Math. France, 92, 11—110 (1964).
3. Obata M., *Affine Connections on Manifolds with Almost Complex, Quaternion or Hermitian Structure*. Japanese Jour. Math., 26, 43—77 (1956).
4. Vamanu E., *Cvasi-conexiuni pe spații cu structură aproape-produs*. An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, S. I, XIII, 2, 401—407 (1967).
5. Vamanu E., *Cvasi-conexiuni asociate unei conexiuni liniare pe un spațiu cu structură aproape-produs (I)*. An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza”, — Iași, S. I, XV, 1, 133 — 142 (1969).
6. Vamanu E., *Cvasi-conexiuni pe varietăți diferențiable*. An., Șt. Univ. „Al. I. Cuza”, — Iași, S. I, VI, 2, 383—388 (1970).

7. Vamanu E., *Quasi-connexions sur variétés différentiables* (II). An Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, S.1, XVIII, 1, 161—166 (1972).
8. Vamanu E., *Conexiuni pe spații Riemann particulare*. Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVII), 1—2, s. I (1977).

QUASI-CONNEXIONS SUR DES ESPACES RIEMANN PARTICULIERS

(Résumé)

Soit V_4 l'espace-temps de la relativité générale muni d'une structure presque-produit, et σ une connexion spinorielle dans V_4 . Dans cette Note on montre que la connexion spinorielle et la structure presque-produit déterminent une paire de quasi-connexions. On étudie quelques propriétés de cette paire de quasi-connexions.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. B. F. R. 274 (1972) et 275 (1973).
2. E. Vamanu, *Quasi-connexions sur variétés différentiables*, Bul. Inst. polit. Iași, S.1, XVIII, 1, 161—166 (1972).
3. E. Vamanu, *Conexiuni pe spații Riemann particulare*, Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVII), 1—2, s. I (1977).
4. E. Vamanu, *Quasi-connexions sur variétés différentiables*, An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, S.1, XVIII, 1, 161—166 (1972).
5. E. Vamanu, *Conexiuni pe spații Riemann particulare*, Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVII), 1—2, s. I (1977).
6. E. Vamanu, *Quasi-connexions sur variétés différentiables*, An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, S.1, XVIII, 1, 161—166 (1972).
7. E. Vamanu, *Conexiuni pe spații Riemann particulare*, Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVII), 1—2, s. I (1977).
8. E. Vamanu, *Quasi-connexions sur variétés différentiables*, An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, S.1, XVIII, 1, 161—166 (1972).
9. E. Vamanu, *Conexiuni pe spații Riemann particulare*, Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVII), 1—2, s. I (1977).
10. E. Vamanu, *Quasi-connexions sur variétés différentiables*, An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, S.1, XVIII, 1, 161—166 (1972).

LA INTEGRACION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON VALORES INICIALES ALEATORIOS

POR

DARIO MARAVALL CASESNOVES

Si

$$(1) \quad \frac{d\vec{\xi}}{dt} = A\vec{\xi}$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables con el tiempo t , que eventualmente pueden ser constantes, escrita en forma matricial, donde A :

$$(2) \quad A = \| a_{ij}(t) \|$$

es la matriz de los coeficientes, si:

$$(3) \quad \varphi(\vec{z}) = \varphi(z_1, \dots, z_n)$$

es la función característica (fc) de los valores iniciales aleatorios $\xi_1(0), \dots, \xi_n(0)$ de las variables aleatorias (v.a.) $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ soluciones del sistema (1), hemos demostrado en la bibliografía [3], que la fc de las v.a. $\xi(t)$ es la solución de la ecuación funcional:

$$(4) \quad \varphi(\vec{z}, t + dt) = \varphi(\vec{z}(I + A dt), t)^*$$

con la condición inicial:

$$(5) \quad \varphi(\vec{z}, 0) = \varphi(\vec{z}).$$

Si la función φ , tiene derivadas continuas de primero y segundo orden la ecuación funcional (4) es equivalente a la ecuación en derivadas parciales:

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \sum_{j=1}^n a_{ji} z_j$$

y la condición inicial es la misma (5). El sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales de la (6) es el:

$$(7) \quad -\frac{dz}{dt} = \vec{z}A$$

*) I es la matriz unidad.

y si la integral general de (7) es :

$$(8) \quad \vec{z}(t) = \vec{C}N(t)$$

la integral de (6) con la condición inicial (5) es :

$$(9) \quad \varphi(\vec{z}N^{-1}(t)N(0)) .$$

También se demuestra en [3] que si la integral general de (1) es la :

$$(10) \quad \vec{\xi}(t) = M(t)\vec{C}$$

la integral de (6) con la condición inicial (5) es :

$$(11) \quad \varphi(\vec{z}M(t)M^{-1}(0))$$

porque se cumple que :

$$(12) \quad M(t)M^{-1}(0) = [N^{-1}(0)N(t)]^{-1}.$$

También se demuestra en [3] que aun cuando la función φ no tenga derivadas parciales de primer orden, en cuyo caso la ecuación funcional (4) y la ecuación en derivadas parciales (6) no son equivalentes, a pesar de ello, las soluciones de (4) con la condición inicial (5), siguen siendo (9) y (11). Este caso se da por ejemplo cuando la fc inicial es la de la distribución de probabilidad multivariante de Cauchy.

Si se trata de v.a. absolutamente continuas, para las que existe una función de frecuencias (ff), transformada de Fourier de la fc, se puede resolver el problema, por otro método distinto, equivalente al anterior, que es el que sigue, si :

$$(13) \quad f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

es la ff de los valores iniciales de las $\xi(0)$, la ff de las soluciones $\xi(t)$ de (1), obedece a la ecuación funcional :

$$(14) \quad f(\vec{x}, t + dt) = \frac{1}{|I + A dt|} f((I + A dt)^{-1}\vec{x}, t),$$

donde I es la matriz unidad, y las barras indican el determinante de la matriz. La ecuación funcional (14) es equivalente a la :

$$(15) \quad f(\vec{x}, t + dt) = (1 - dt \sum_{i=1}^n Q_{ii}(t)) f((I - A dt)^{-1}\vec{x}, t)$$

despreciando los infinitésimos de orden superior al primero. Si la ff tiene derivadas parciales de primero y segundo orden continuas, las (14) y (15) son equivalentes a la ecuación en derivadas parciales :

$$(16) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + f \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j = 0$$

y la integral de ésta con la condición inicial :

$$(17) \quad f(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$

es :

$$(18) \quad f(\vec{x}, t) = |M(0) M^{-1}(t)| f(M(0) M^{-1}(t) \vec{x})$$

y se demuestra en [3] que se cumple la :

$$(19) \quad |M(0) M^{-1}(t)| = e^{-\int_0^t dt \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)}$$

El significado de las matrices M , es el mismo que las que figuran en (10) y (11). También como en el caso de las fc, se demuestra en [3] que aun cuando la ff no tenga derivadas parciales de primer orden en cuyo caso no son equivalentes las ecuaciones funcionales (14) y (15) y la ecuación en derivadas parciales (16), sin embargo la solución de las primeras con la condición inicial (17) es la (18).

Vamos a demostrar que una integral primera del sistema de ecuaciones diferenciales (1) es una v.a. cuya distribución de probabilidad independiente del tiempo, es una constante aleatoria del movimiento. Para ello introduzcamos la notación :

$$(20) \quad R(t) = M(t) M^{-1}(0) \Rightarrow R(0) = I.$$

Si $g(\vec{x})$ es una integral primera de (1), se tiene que

$$(21) \quad g(\vec{x}) = g(R(t) \vec{x})$$

igualdad que se mantiene si en el primer miembro, se sustituye $R(t)$ por cualquier potencia entera positiva o negativa de ella misma. La fc del valor aleatorio de dicha integral primera es :

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \cdot g(\vec{x})} f(R^{-1}(t) \vec{x}) |R^{-1}(t)| d\vec{x}$$

en el tiempo t , y si hacemos bajo el signo integral el cambio de variables :

$$(23) \quad R^{-1}(t) \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow |R^{-1}(t)| d\vec{x} = d\vec{y}$$

se obtiene

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \cdot g(R(t) \vec{y})} f(\vec{y}) d\vec{y} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \cdot g(\vec{y})} f(\vec{y}) d\vec{y}$$

el último paso en virtud de (21). Por tanto la distribución de probabilidad de la integral primera es independiente del tiempo, lo que demuestra que es una constante aleatoria del movimiento.

Se puede así desarrollar una teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n y de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

de primer orden, cuando los valores iniciales son aleatorios, que nos parece puede encontrar muchas aplicaciones en la técnica, y en las ciencias físicas, del comportamiento humano (economía) etc., y dar origen a muy largos desarrollos matemáticos. Aquí hemos expuesto las ecuaciones de partida para la misma.

Si en las fórmulas anteriores relativas a las f_c , efectuamos los siguientes cambios formales :

función característica $\longleftrightarrow$ función generatriz

vector fila $\longleftrightarrow$ vector columna

matriz no degenerada $\longleftrightarrow$ matriz estocástica

de modo que en vez de la ecuación funcional (4) se tenga la :

$$(25) \quad g(\bar{z}, t + dt) = g((I + A dt) \bar{z}, t)$$

y la ecuación en derivadas parciales que le sea equivalente si la función generatriz g , tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas, se desarrolla un proceso estocástico, que ofrece interés y al que hemos denominado de la función generatriz de un proceso markoviano (vease en Bibliografía [1] y [3]).

La ingeniero M^a Dolores Maravall Gómez-Allende ha prolongado estas investigaciones habiendo obtenido varios resultados : ha realizado todos los cálculos en el caso de sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de coeficientes constantes, y encuentra que si las raíces de la ecuación característica son reales negativas, se pueden amplificar las soluciones a escala exponencial, de modo que cuando el tiempo tiende a infinito, las soluciones tienden asintoticamente a una distribución de probabilidad límite, y si una raíz de la ecuación característica al menos es positiva, las soluciones se pueden reducir a escala exponencial de modo que cuando el tiempo tiende a infinito, las soluciones tienden también asintoticamente a una distribución de probabilidad límite. También ha investigado el péndulo estocástico, entendiéndolo por tal un conjunto de péndulos cuyas posiciones y velocidades iniciales son aleatorias y ha obtenido dos resultados curiosos : uno que si inicialmente el valor medio del producto de la posición por la velocidad es nulo y si la energía está equipartida (energías cinética y potencial iguales), la energía permanece equipartida durante todo el movimiento ; el otro resultado es que si la posición y la velocidad iniciales siguen una distribución normal (gaussiana) no correlacionada, de valores medios la posición de equilibrio del péndulo y velocidad nula respectivamente, entonces la distribución conjunta de la probabilidad de la posición y de la velocidad permanece la misma (invariante) durante todo el movimiento.

Obviamente hay una mucho mayor riqueza de problemas en la teoría probabilista que acabamos de exponer que en la teoría clásica determinista.

La integración de la ecuación diferencial lineal de orden n , cuando el valor de la función y de sus $n-1$ primeras derivadas para $t=0$, es una v.a. envariante, se resuelve como un caso particular de la teoría anterior.

BIBLIOGRAFIA

1. Maravall Casesnoves D., *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos*. Ed. Paraninfo, Madrid.
2. Maravall Casesnoves D., *Lineas de investigación en los Procesos Estocásticos y el Movimiento Browniano*. Ed. El Instituto de Espana, Madrid.
3. Maravall Casesnoves D., *Ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales lineales con condiciones iniciales aleatorias*. Revista de la Real Academia de Ciencias de Espana, 1978.

INTEGRAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE
CU VALORI ÎNȚIALE ALEATOARE

(Rezumat)

Se dezvoltă o teorie a ecuațiilor diferențiale de ordina n , precum și a sistemelor de ecuații diferențiale lineare de primul ordin, cu valori inițiale aleatoare, de interes imediat în problemele actuale de tehnică, fizică, economie etc.

1. The first part of the report is devoted to a general description of the situation in the country. It is followed by a detailed account of the work done during the year. The third part contains a summary of the results of the work, and the fourth part contains a list of the names of the persons who have taken part in the work.

REPORT ON THE WORK OF THE COMMITTEE FOR THE YEAR 1900

The Committee has the honor to acknowledge the receipt of the report of the work of the Committee for the year 1900. The report is a most interesting and valuable one, and it is a pleasure to find that the Committee has been able to accomplish so much in the course of the year.

DISTRIBUȚII CVAZI-STRUCTURALE

DE

AL. NEAGU

1. Introducere. În [2] Gh. Gheorghiev introduce o clasă de distribuții atașată unui pseudo-grup Lie, care se caracterizează prin faptul că aplicarea algoritmului reperului mobil MRM-configurației definite de distribuție și de G -structura atașată pseudo-grupului conduce la o MRM-configurație singulară (v. [5]).

În [3] ne ocupăm de această clasă de distribuții tratându-le în limbajul modern al geometriei diferențiale globale, reușind astfel caracterizări simple ale acestora.

În acest context este natural să se pună întrebarea: ce se întâmplă în cazul în care algoritmul reperului mobil conduce la o MRM-configurație singulară în a doua sa etapă? Răspunsul la această întrebare constituie conținutul acestei lucrări.

2. O MRM-configurație este un ansamblu (X, f, Y, G) în care X este un G -spațiu (v. [1]) în care G este un grup Lie compact ce acționează propriu și liber, Y este un G -spațiu în care toate orbitele au același tip și $f: X \rightarrow Y$ este o aplicație echivariantă. Peste tot în această lucrare ne vom plasa în cazul diferentiabil. O MRM-configurație se numește *reductibilă* dacă există o placă globală în Y (sau, echivalent, există o retracție echivariantă a lui Y la o orbită). Deoarece G este compact în Y există plăci locale (v. [1]) și deci o MRM-configurație este întotdeauna local reductibilă. Pentru a evita complicațiile și a ușura expunerea vom lucra în continuare cu MRM-configurații global reductibile. O MRM-configurație se numește *singulară* dacă G acționează tranzitiv pe Y .

Teorema 1. Dacă (X, f, Y, G) este o MRM-configurație reductibilă atunci există o subvarietate închisă X_1 a lui X care satisface următoarele proprietăți;

a) X_1 este un H spațiu, unde H este unul din grupurile de izotropie ale punctelor din Y ;

b) $\pi(X_1) = X/G$, unde X/G este spațiul orbitelor lui X iar π este proiecția canonică $X \rightarrow X/G$;

c) spațiul orbitelor H -spațiului X_1 coincide cu X/G .

Demonstrație. Fie S o placă globală a lui Y . Atunci $G \cdot S = Y$ și există o retracție echivariantă $\tau: Y \rightarrow G \cdot y_0$, unde $y_0 \in Y$ are grupul

de izotropie H . Să notăm cu X_1 contraimaginea lui y_0 prin $(\tau \circ f)^{-1}$. Rezultă că X_1 este o subvarietate închisă a lui X . Dacă $x \in X_1$ și $h \in H$ atunci :

$$(\tau \circ f)(h \cdot x) = h \cdot (\tau \circ f)(x) = h \cdot y_0 = y_0$$

și deci $h \cdot x \in X_1$ de unde rezultă că X_1 este un H -spațiu. Deoarece τ este o retracție echivariantă și toate orbitele lui Y au același tip rezultă că orice punct din $\tau^{-1}(y_0)$ are grupul de izotropie H . Fie $x_0 \in X_1$ și $x_1 = h \cdot x_0$ cu h arbitrar din H . Atunci :

$$f(x_1) = f(h \cdot x_0) = h \cdot f(x_0) = f(x_0),$$

deci f este constantă pe orbitele H -spațiului X_1 . Fie $x_1, x_2 \in X_1$ astfel ca $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Rezultă că x_1 și x_2 sînt pe aceeași orbită a G -spațiului X și deci există $g \in G$ astfel ca $x_2 = g \cdot x_1$. Atunci :

$$y_0 = (\tau \circ f)(x_2) = (\tau \circ f)(g \cdot x_1) = g \cdot (\tau \circ f)(x_1) = g \cdot y_0$$

și deci $g \in H$. Rezultă că x_1 și x_2 aparțin aceleiași orbite a lui H în X_1 . Fie $x^* \in X/G$ și fie $x_0 \in X$ astfel ca $\pi(x_0) = x^*$. Fie $y = f(x_0)$, atunci există $g \in G$ astfel ca $g \cdot y \in \tau^{-1}(y_0)$. Dar :

$$f(g \cdot x_0) = g \cdot f(x_0) = g \cdot y \in \tau^{-1}(y_0)$$

deci $g \cdot x_0 \in X_1$ și deoarece x_0 și $g \cdot x_0$ aparțin aceleiași orbite a G -spațiului X rezultă că $\pi(x_0) = \pi(g \cdot x_0)$. Rezultă că restricția lui π la X_1 este surjectivă și spațiul orbitelor X_1/H coincide cu X/G .

Observație. În condițiile teoremei precedente $X \rightarrow X/G$ este un spațiu fibrat principal și se vede imediat că X_1 este un subfibrat închis al lui X .

Consecință. În condițiile Teoremei 1, restricția lui f la X_1 induce o aplicație J a lui X/G într-o placă globală a G -spațiului Y .

Demonstrație. Fie $x \in X_1$ și $x^* = \pi(x)$. Atunci punînd $J(x^*) = f(x)$ rezultă J bine definită deoarece f este constantă pe orbitele H -spațiului X_1 .

Aplicația J se numește invariant al MRM-configurației reductibile (X, f, Y, G) .

Teorema 2. Dacă o MRM-configurație reductibilă este singulară atunci invariantul J atașat este constant.

Demonstrație. Urmărind demonstrația Teoremei 1, retracția coincide cu identitatea lui Y de unde rezultă că o placă globală în Y este formată dintr-un singur punct și deci J este constant.

Procesul descris în Teorema 1 și Consecință, prin care unei MRM-configurații i se atașează un H -spațiu X_1 și un invariant J se numește *R-algoritm* (sau algoritmul reperului mobil).

3. Fie X o varietate diferențiabilă dotată cu o G -structură $B(X, G)$. Deoarece grupul structural G admite întotdeauna o reducere la subgrupul său maximal compact, vom presupune de la început că G este un grup Lie compact. Vom nota cu $\pi: H(\bar{X}) \rightarrow X$ fibratul reperelor liniare tangente la X și cu K_m^2 varietatea Grassmann a subspațiilor p -dimensionale ale lui R^m , $m = \dim X$. Este binecunoscut că varietatea K_m^2 este compactă

și conexă și se poate identifica cu L_m/K_p unde L_m este grupul liniar general și K_p este subgrupul lui L_m definit prin :

$$K_p = \{ \| a_j^i \| \in L_m, a_{b'}^{i'} = 0, b = 1, 2, \dots, p; i' = p + 1, \dots, m; \\ i, j = 1, 2, \dots, m \}.$$

Vom nota cu $K^p(X)$ fibrantul Grassmann al p -planelor tangente la X . Atunci $K^p(X)$ este un fibrat asociat cu $H(X)$ cu fibră tip K_m^p .

Fie Δ o distribuție regulată pe X , $\dim \Delta = p$. Atunci Δ definește o secțiune : $\Delta : x \in X \rightarrow \Delta_x \in K^p(X)$.

Să observăm că $H(X)$ este un L_m -spațiu la dreapta și K_m^p este un L_m -spațiu la stânga; putem deci construi produsul torsionat $H(X) \times \times L_m K_m^p$ care se identifică canonic cu $K^p(X)$ (v. [1]). Rezultă că existența secțiunii Δ implică existența unei aplicații L_m -echivariante : $A : H(X) \rightarrow K_m^p$.

Teorema 3. *Ansamblul (B, A, K_m^p, G) este o MRM-configurație.*

Demonstrație. Evident G acționează propriu și liber pe B , K_m^p este un G -spațiu în raport cu restricția lui L_m la subgrupul G și A este G -echivariantă.

Observație. Deoarece G este presupus compact, G -spațiul K_m^p are un număr finit de tipuri de orbite [1].

Vom presupune în continuare că MRM-configurația (B, A, K_m^p, G) este reductibilă căci în caz contrar putem găsi o acoperire deschisă finită a lui X astfel ca restricția MRM-configurației la oricare din deschisii acestei acoperiri să fie reductibilă. Aplicând R -algoritmul MRM-configurației (B, A, K_m^p, G) obținem, în virtutea Teoremei 1 și a Consecinței sale, un subfibrat B_1 și un invariant $J^1 : X \rightarrow S$ unde S este o placă în K_m^p astfel ca grupul de izotropie al oricărui punct din S să fie 1G . Fie distribuția $\Delta^1 = \text{Ker } J^1$. Atunci G -structura B_1 și distribuția Δ^1 definesc MRM-configurația $(B_1, A_1, K_m^{p_1}, {}^1G)$ unde $p_1 = \dim \Delta^1$.

O distribuție involutivă Δ se numește *structurală* pentru o G -structură B dacă aplicația A este constantă pe B_F oricare ar fi foaia F a lui Δ și unde s-a notat cu B_F restricția lui B la foaia F .

Definiție. Distribuția Δ se numește *cvazi-structurală* dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

- 1) MRM-configurația (B, A, K_m^p, G) este reductibilă ;
- 2) distribuția Δ este structurală pentru G -structura B_1 .

Observație. Dacă distribuția Δ este involutivă, foile lui Δ definesc pe X o structură de varietate p -dimensională notată X^p ale cărei componente conexe sînt tocmai foile lui Δ și pentru care $\text{id} : X^p \rightarrow X$ este o scufundare regulată (v. [7]).

Teorema 4. *Fie Δ o distribuție pe varietatea diferențiabilă X dotată cu o G -structură B . Dacă :*

- 1) Δ este involutivă ;
- 2) Δ este cvazistrukturală ;
- 3) Δ este regulată în sens Palais,

atunci, spațiul foilor lui Δ notat X_{n-p} este spațiul total al unui spațiu fibrat principal cu grup structural $K = N/{}^1G$ unde N este normalizatorul lui 1G în G .

Demonstrație. Să notăm cu F o foaie arbitrară a lui Δ . Aplicând R -algoritmul MRM-configurației (B, A, K_m^p, G) rezultă că restricția lui A la B_1 este constantă pe fibrele locale ale lui B_1 și deoarece Δ este cvazi-structurală rezultă că A este constantă pe B_{1F} (restricția lui B_1 la F). Deoarece F este componentă conexă a lui X^p rezultă că restricțiile J_F ale lui J la foile lui Δ definesc aplicația $\bar{J}: X^p \rightarrow M$ unde M este spațiul punctelor fixe ale acțiunii lui 1G pe K_m^p . Rezultă că $\Delta^1 = \text{Ker } \bar{J}_*$ este distribuția tangentă la X^p care coincide în fiecare punct cu spațiul tangent și deci varietățile sale integrale sînt componentele conexe ale lui X^p . Pe de altă parte varietățile integrale ale distribuției Δ^1 (J privită ca submersie) sînt $J^{-1}(\alpha)$ cu $\alpha \in M$ care coincid deci cu foile lui Δ . Rezultă că spațiul foilor lui Δ se identifică cu M și deci X_{n-p} este un N -spațiu pe care 1G acționează trivial și deci K acționează propriu și liber (v. [1]).

Primită la 26 august 1977

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Bredon G. E., *Introduction to Compact Transformation Groups*. Acad. Press, New-York — London, 1972.
2. Gheorghiev Gh., *Sur les distributions structurales d'un pseudogroupe de Lie*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39, 35—46 (1967).
3. Neagu A., *Sur les distributions structurales d'une variété douée d'une G-structure*. C. R. Acad. Sc. Paris, 276, 479 (1972).
4. Neagu A., *Sur les distributions structurales d'une G-structure*. Atti Accad. Naz. Lincei, 54, 882—886 (1973).
5. Neagu A., *Theoretical Aspects in the Moving Frame Method* (va apare în Atti Accad. Naz. Lincei).
6. Palais R. S., *On the Existence of Slices for Actions of Non-compact Lie Groups*. Ann. of Math., 73, 295 — 323 (1961).
7. Reeb G., *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Act. Sc. et Ind., 1183, Hermann, Paris, 1952.

QUASI-STRUCTURAL DISTRIBUTIONS

(Summary)

In this paper we introduce the notion of quasi-structural distribution and we prove that the integral manifold space have a principal fibre bundle structure.

INVARIANTI AI GRUPURILOR DE TRANSFORMĂRI DE CONEXIUNI FINSLER CONFORM METRICE

DE

I. GHINEA

0. În această lucrare ne propunem să determinăm câțiva invarianti ai grupurilor de transformări de conexiuni Finsler conform metrice.

Notatiile și formulele utilizate sînt cele din [2], [6].

1. Fie M o varietate Finsler, diferențiabilă de dimensiune n . Să considerăm pe M o conexiune Finsler $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$ definită ca în [2], și o structură conform metrică ρg_{ij} definită printr-un câmp de pseudo-tensori $g_{ij}(x, y)$ (unde y este elementul de suport în punctul x).

O conexiune Finsler $(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i)$ este [6] compatibilă cu o structură conform metrică ρg_{ij} (sau este conform metrică) dacă verifică relațiile

$$(1.1) \quad g_{ij|k} = 2\omega_k g_{ij}, \quad g_{ij|k} = 2\lambda_k g_{ij},$$

unde $\omega_k = \omega_k(x, y)$ și $\lambda_k = \lambda_k(x, y)$ sînt vectori covarianți omogeni în raport cu y de grad 0 respectiv -1.

Din [6] rezultă că singura conexiune Finsler conform metrică $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ care prezintă proprietatea

$$(1.2) \quad N_j^h = \dot{N}_j^h, \quad F_{jk}^h = F_{kj}^h, \quad C_{jk}^h = C_{kj}^h$$

este dată de

$$(1.3) \quad \begin{cases} N_j^h = \dot{N}_j^h, \\ F_{jk}^h = \dot{F}_{jk}^h - \delta_j^h \omega_k - \delta_k^h \omega_j + g_{jk} g^{hm} \omega_m, \\ C_{jk}^h = \dot{C}_{jk}^h - \delta_j^h \lambda_k - \delta_k^h \lambda_j + g_{jk} g^{hm} \lambda_m, \end{cases}$$

unde $(\dot{N}_j^h, \dot{F}_{jk}^h, \dot{C}_{jk}^h)$ este conexiunea lui Cartan a tensorului fundamental $g_{ij}(x, y)$.

Tot din [6] rezultă că mulțimea transformărilor de conexiuni Finsler conform metrice este dată de formulele

$$(1.4) \quad \begin{cases} \bar{N}_j^h = N_j^h + A_j^h, \\ \bar{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{2} g^{pj} \frac{\partial g_{pj}}{\partial y^q} A_k^q - \delta_j^h \omega_k - \delta_k^h \omega_j + g_{jk} g^{hm} \omega_m + P_{jk}^h, \\ \bar{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \delta_j^h \lambda_k - \delta_k^h \lambda_j + g_{jk} g^{hm} \lambda_m + Q_{jk}^h, \end{cases}$$

unde $A_j^h, P_{jk}^h, Q_{jk}^h$ sînt tensori arbitrari omogeni de grad 1, 0, -1 respectiv, ultimii doi fiind hibrizi în indicii h și j . Această mulțime formează grup abelian în raport cu compunerea obișnuită a aplicațiilor $(N, F, C) \rightarrow (\bar{N}, \bar{F}, \bar{C}) \rightarrow (N, F, C)$.

2. Să considerăm în formulele (1.4) cazul cînd $A_j^h = 0, P_{jk}^h = 0, Q_{jk}^h = 0$. Obținem

$$(2.1) \quad \begin{cases} \bar{N}_j^h = N_j^h, \\ \bar{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \delta_j^h \omega_k - \delta_k^h \omega_j + g_{jk} g^{hm} \omega_m, \\ \bar{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \delta_j^h \lambda_k - \delta_k^h \lambda_j + g_{jk} g^{hm} \lambda_m. \end{cases}$$

Presupunem în plus că conexiunea $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este simetrică deci $F_{jk}^h = F_{kj}^h, C_{jk}^h = C_{kj}^h$. Această proprietate este invariantă la transformările (2.1).

Să facem mai întîi în a doua formulă din (2.1) $h = j$ și să sumăm. Dacă notăm $F_k = F_{hk}^h$ și $\bar{F}_k = \bar{F}_{hk}^h$ rezultă

$$(2.2) \quad \omega_k = -\frac{1}{n}(\bar{F}_k - F_k).$$

Introducînd aceste valori ale lui ω_k în a doua relație din (2.1) obținem

$$(2.3) \quad \bar{F}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \bar{F}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \bar{F}_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} \bar{F}_m = F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} F_m.$$

Dacă procedăm în mod analog cu a treia formulă din (2.1) obținem

$$(2.4) \quad \bar{C}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \bar{C}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \bar{C}_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} \bar{C}_m = C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} C_m.$$

Din relațiile (2.3) și (2.4) rezultă

Teorema 2.1. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform metrică, simetrică, atunci obiectele geometrice

$$(2.5) \quad \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} F_m,$$

și

$$(2.6) \quad \mathcal{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} C_m$$

unde $F_k = F_{hk}^h, C_k = C_{hk}^h$, sînt invariante la transformările de conexiuni Finsler conform metrică (2.1).

3. Să considerăm conexiunea conform metrică $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ simetrică (1.3) (conexiunea Finsler-Weyl) și să procedăm ca la punctul precedent cu ultimele două formule din (1.3).

Dacă facem mai întîi în a doua formulă din (1.3) $h = j$ și sumăm, rezultă

$$(3.1) \quad F_k = \bar{F}_k - n\omega_k,$$

unde $F_k = F_{hk}^h$, $\hat{F}_k = \hat{F}_{hk}^h$. Prin eliminarea lui ω_k între relațiile (3.1) și (1.3) obținem următoarele formule

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{jk}^h &= F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} F_m = \\ (3.2) \quad &= \hat{F}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{F}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{F}_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} \hat{F}_m. \end{aligned}$$

Dacă procedăm în mod analog cu a treia formulă din (1.3) și notăm $C_k = C_{hk}^h$, $\hat{C}_k = \hat{C}_{hk}^h$ obținem formulele

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{jk}^h &= C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} C_m = \\ (3.3) \quad &= \hat{C}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{C}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{C}_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} \hat{C}_m. \end{aligned}$$

Din relațiile (3.2) și (3.3) rezultă

Teorema 3.1. Dacă $(N_j^h, \hat{F}_{jk}^h, \hat{C}_{jk}^h)$ este conexiunea lui Cartan a tensorului fundamental g_{ij} , atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(3.4) \quad \begin{cases} N_j^h = \hat{N}_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = \hat{F}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{F}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{F}_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} \hat{F}_m, \\ \mathcal{C}_{jk}^h = \hat{C}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{C}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{C}_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} \hat{C}_m, \end{cases}$$

unde $\hat{F}_k = \hat{F}_{hk}^h$ și $\hat{C}_k = \hat{C}_{hk}^h$, este o conexiune Finsler conform metrică.

Conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de (3.4), întâlnită în spațiul Weyl de J. M. Thomas ([4], [5]), o vom numi conexiunea Finsler a lui J. M. Thomas.

Tot din relațiile (3.2) și (3.3) rezultă următoarea teoremă mai generală:

Teorema 3.2. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform metrică, simetrică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(3.5) \quad \begin{cases} N_j^h = \hat{N}_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} F_m, \\ \mathcal{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} g_{jk} g^{hm} C_m, \end{cases}$$

unde $F_k = F_{hk}^h$ și $C_k = C_{hk}^h$, este o conexiune Finsler conform metrică.

Dacă în teoremele 3.1 și 3.2 ținem seamă de formulele (3.2) și (3.3) și de teorema 2.1, obținem

Teorema 3.3. Conexiunea Finsler conform metrică $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de (3.4) sau (3.5) este un invariant al grupului de transformări de conexiuni Finsler conform metrice (2.1).

4. Să înmulțim a doua formulă din (2.1) cu Ω^{*rj}_{hs} :

$$(4.1) \quad \Omega^{*rj}_{hs} \bar{F}^h_{jk} = \Omega^{*rj}_{hs} F^h_{jk} - \Omega^{*rj}_{hs} \delta^h_j \omega_k - \Omega^{*rj}_{hs} \delta^h_k \omega_j + \Omega^{*rj}_{hs} g_{jk} g^{hm} \omega_m.$$

Dacă se ține seamă în ultimii trei termeni ai relației precedente de expresia operatorului lui Obata Ω^{*rj}_{hs} , obținem

$$(4.2) \quad \Omega^{*rj}_{hs} \bar{F}^h_{jk} = \Omega^{*rj}_{hs} F^h_{jk} - \frac{1}{2} (\delta^r_h \delta^j_s + g_{hs} g^{rj}) \delta^h_j \omega_k - \frac{1}{2} (\delta^r_h \delta^j_s + g_{hs} g^{rj}) g_{jk} g^{hm} \omega_m,$$

sau după reduceri,

$$(4.3) \quad \Omega^{*rj}_{hs} \bar{F}^h_{jk} = \Omega^{*rj}_{hs} F^h_{jk} - \delta^r_s \omega_k.$$

Facem $r = k$ în (4.3) și sumăm:

$$(4.4) \quad \Omega^{*kj}_{hs} \bar{F}^h_{jk} = \Omega^{*kj}_{hs} F^h_{jk} - \omega_s.$$

Prin eliminarea lui ω_s între relațiile (4.4) și (4.3) obținem

$$(4.5) \quad \Omega^{*rj}_{hs} \bar{F}^h_{jk} - \delta^r_s \Omega^{*pj}_{hk} \bar{F}^h_{jp} = \Omega^{*rj}_{hs} F^h_{jk} - \delta^r_s \Omega^{*pj}_{hk} F^h_{jp}.$$

Procedind în mod analog cu a treia relație din (2.1), obținem

$$(4.6) \quad \Omega^{*rj}_{hs} \bar{C}^h_{jk} - \delta^r_s \Omega^{*pj}_{hk} \bar{C}^h_{jp} = \Omega^{*rj}_{hs} C^h_{jk} - \delta^r_s \Omega^{*pj}_{hk} C^h_{jp}.$$

Rezultă

Teorema 4.1. Obiectele geometrice

$$(4.7) \quad I^r_{sk} = \Omega^{*rj}_{hs} F^h_{jk} - \delta^r_s \Omega^{*pj}_{hk} F^h_{jp}$$

și

$$(4.8) \quad J^r_{sk} = \Omega^{*rj}_{hs} C^h_{jk} - \delta^r_s \Omega^{*pj}_{hk} C^h_{jp}$$

sînt invariante la transformările de conexiuni Finsler conform metrice (2.1).

Primită la 10 ianuarie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Cartan E., *Les espaces de Finsler*. Actualités scientifiques et industrielles, 79, Paris, 1934.
2. Matsumoto M., *The Theory of Finsler Connections*. Publ. of the Study Group of Geometry 5, College of Liberal Arts and Sci., Okayama Univ., Japan, 1970.
3. Rund H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer Verlag, Berlin, 1959.
4. Schouten J. A., *Ricci Calculus*. Second Edition, Springer Verlag, Berlin, 1954.
5. Vrănceanu Gh., *Lecții de geometrie diferențială*. Vol II, Ed. Did. și Ped., Buc., 1977.
6. Ghinea I., *Connexions finsleriennes conformes métriques*. An. Univ. Timișoara, Ser. Șt. mat. fiz., XIV, 2, 101—115 (1977).

INVARIANTS DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS DES CONNEXIONS FINSLÉRIENNES CONFORMES MÉTRIQUES

(Résumé)

En utilisant les résultats établis en [6] regardant les connexions finsleriennes compatibles avec une structure coforme métrique, dans cette Note on étudie des invariants des groupes de transformations des connexions finsleriennes conformes métriques, parmi lesquelles la connexion conforme (3.4), qu'on appelle connexion Finsler-Thomas.

TRANSFORMATIONS FROM CONCURRENT CHARTS INTO TANGENTIAL CONTACT CIRCULAR CHARTS

BY

AKIRA MATSUDA

1. Introduction. The author and K. Morita researched geometric transformations between general concurrent charts and tangential contact charts [1]. The idea in this article is identical with that appeared in the above paper except for a difference of transformation expression.

In this article the author discusses the relation

$$(1) \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + u(x, y) \bar{x} + v(x, y) \bar{y} + w(x, y) = 0,$$

where $\{u(x, y)\}^2 + \{v(x, y)\}^2 - 4w(x, y) \geq 0$ for all x, y ; and $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ are real valued continuous functions of x, y and of class C^1 with respect to x and y . By the relation (1) general concurrent charts of three variables in the xy -plane are transformed into tangential contact circular charts) in the $\bar{x}\bar{y}$ -plane.

2. Transformations that Transform General Concurrent Charts into T.C.C.C. by Envelope Method. We first consider the relation (1), by which a point (x, y) in the xy -plane is transformed into a real circle in the $\bar{x}\bar{y}$ -plane. Hereafter we denote xy -plane and the $\bar{x}\bar{y}$ -plane by E and $\bar{E}$, res-

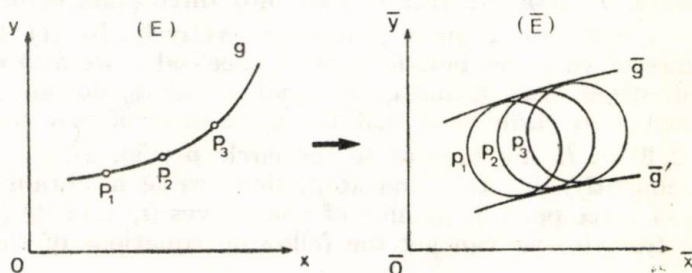


Fig. 1

pectively. Assuming that a set of points P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) on a given continuous curve g in E is transformed into a family of circles p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in $\bar{E}$ by (1), then, in general, the family of circles has two envelopes $\bar{g}$ and $\bar{g}'$ (Fig. 1).

¹⁾ Hereafter we abbreviate tangential contact circular charts (or chart) as T.C.C.C..

An equation of the curve g in E being given by

$$(2) \quad f(x, y) = 0,$$

the equations of the envelopes $\bar{g}$ and $\bar{g}'$ can be found as follows. Assuming that $\partial f / \partial y \neq 0$, we have an explicit form of (2) as $y = y(x)$, then the curve g is transformed into a family of circles in $\bar{E}$ expressed by the equation

$$(3) \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + u(x, y(x)) \bar{x} + v(x, y(x)) \bar{y} + w(x, y(x)) = 0$$

by (1). Regarding x as a parameter, we shall find the envelopes of (3). Differentiating (3) partially with respect to x , we have

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y(x)) \bar{x} + \frac{\partial}{\partial x} v(x, y(x)) \bar{y} + \frac{\partial}{\partial x} w(x, y(x)) = 0,$$

and eliminating x from (3) and the above expression, we get

$$(4) \quad \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \text{and} \quad \bar{f}'(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

which are the required equations of the envelopes $\bar{g}$ and $\bar{g}'$, respectively.

Given the functional relation of three variables

$$(5) \quad F(t_1, t_2, t_3) = 0 \quad a_i \leq t_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

where F is a real function of real variables t_i ($i = 1, 2, 3$) and of class C^1 . We now assume that the equations representing the general concurrent chart for (5) are given by

$$(6) \quad f_i(x, y, t_i) = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

and let (t_i) ($i = 1, 2, 3$) denote three families of curves expressed by (6), respectively, and then we choose, from (t_i) ($i = 1, 2, 3$), a triplet t_i ($i = 1, 2, 3$), whose curves t_i ($i = 1, 2, 3$) intersect each other at a point P . Furthermore, we assume that the curves t_i ($i = 1, 2, 3$) and their point of intersection P in E are transformed into three pairs of new curves t_i and t'_i ($i = 1, 2, 3$), and a circle p in $\bar{E}$, respectively, by (1). Here, t_i and t'_i are values of variables but, for convenience's sake, we also use them as symbols of curves. And, t_i and t'_i are equal as values, but are different as curves. Then, it is easily seen that the three pairs of new curves t_i and t'_i ($i = 1, 2, 3$) in $\bar{E}$ are tangent to the circle p (Fig. 2).

Consequently, by this transformation, we can obtain a T.C.C.C. consisting of three pairs of families of new curves (t_i) and (t'_i) ($i = 1, 2, 3$). And then, from (6) we can get the following equations of them

$$(7) \quad \bar{f}_i(\bar{x}, \bar{y}, t_i) = 0 \quad \text{and} \quad \bar{f}'_i(\bar{x}, \bar{y}, t_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

respectively, in the same way as we have obtained (4) from (2).

The values t_1 and t_2 being given, the method for finding value t_3 satisfying (5) is as follows. We first draw a circle which is tangent to four curves t_1, t'_1, t_2 and t'_2 in $\bar{E}$ (there always exists such a circle); on this occasion, if the circle is tangent to both curves t_3 and t'_3 , then t_3 is the required value.

3. Special Cases of Our Transformations. 3.1. The case where $w(x, y) \equiv 0$ in the relation (1).

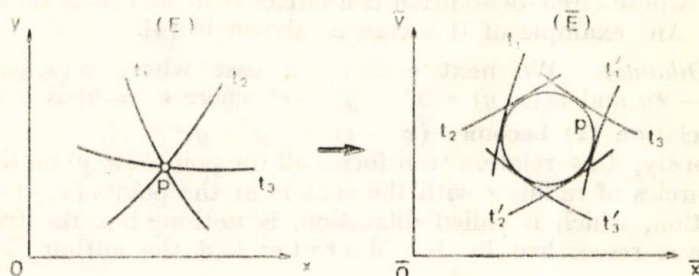


Fig. 2

In this case the relation (1) being

$$(8) \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + u(x, y)\bar{x} + v(x, y)\bar{y} = 0,$$

all the points (x, y) on the curve g in E are transformed into circles passing through the origin in $\bar{E}$, therefore the envelope $\bar{g}'$ in Fig. 1 is degenerated into the origin $\bar{O}$.

Consequently, a given concurrent chart is transformed into a T.C.C.C. consisting of three families of curves (t_i) ($i = 1, 2, 3$), whose circle of solution is a circle passing through the origin O (Fig. 3a).

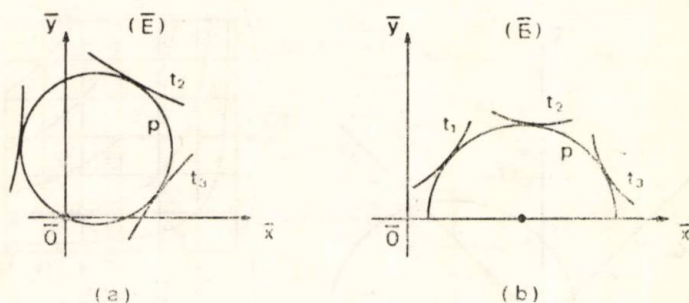


Fig. 3

3.2. The case where $v(x, y) \equiv 0$ in the relation (1). In this case the relation (1) becomes

$$(9) \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + u(x, y)\bar{x} + w(x, y) = 0,$$

where $\{u(x, y)\}^2 - 4w(x, y) \geq 0$ for all x, y ; and all the points (x, y) on the curve g in E are transformed into circles with the centers on the $\bar{x}$ -axis in $\bar{E}$, therefore the envelopes $\bar{g}$ and $\bar{g}'$ in Fig. 1 are symmetrical with respect to the $\bar{x}$ -axis. Hence we may consider only the upper half plane of $\bar{E}$.

Consequently, a given concurrent chart is transformed into a T.C.C.C. consisting of three families of curves (t_i) ($i = 1, 2, 3$) in the upper half plane of $\bar{E}$, whose circle of solution is a circle with the center on the $\bar{x}$ -axis (Fig. 3 b). An example of this case is shown in [4].

3.3. Dilatation. We next consider a case where $u(x, y) = -2x$, $v(x, y) = -2y$ and $w(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ where $r (> 0)$ is a constant; then the relation (1) becomes $(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 = r^2$.

Obviously, this relation transforms all the points (x, y) on the curve g in E into circles of radius r with the centers at the points (x, y) in E . This transformation, which is called dilatation, is nothing but the transformation that was researched by K. Morita and the author [2].

4. Example. Construct a T.C.C.C. from a given concurrent chart expressed by the equations:

$$(10) \quad (t_1): x = t_1, \quad (t_2): y = t_2, \quad (t_3): xy = t_3^2,$$

satisfying the functional relation

$$(11) \quad t_3 = \sqrt{t_1 t_2} \quad (t_1, t_2, t_3 > 0).$$

We shall consider, as an example, the relation

$$(12) \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2(x - y)\bar{x} - 2xy = 0,$$

which is a expression of the form (9); and try to transform the equations (10) by this relation.

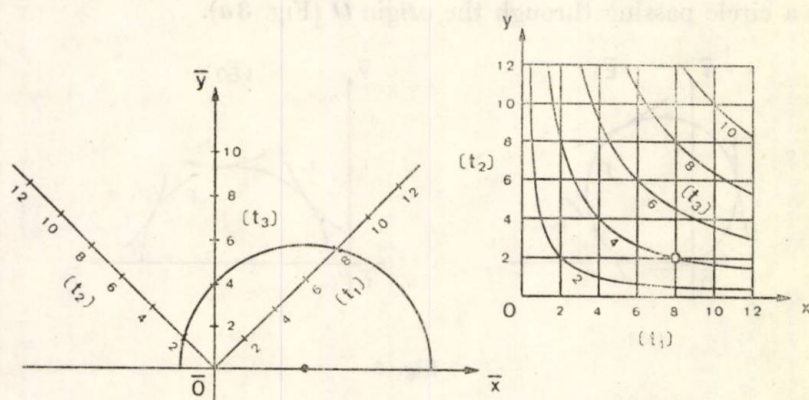


Fig. 4 — Chart of $t_3 = \sqrt{t_1 t_2}$. The figure shows $t_1 = 8, t_2 = 2 \Rightarrow t_3 = 4$.

From the third equation of (10) we get $y = t_3^2/x$, substituting this into (12), we have

$$(13) \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\left(x - \frac{t_3^2}{x}\right)\bar{x} - 2t_3^2 = 0.$$

Differentiating the above expression partially with respect to x , we have $\bar{x} = 0$. Then substituting this into (13) we get $\bar{y}^2 = 2t_3^2$. Since we need only to consider the upper half plane of $\bar{E}$, we have $y = \sqrt{2}t_3$. Thus we obtain

$$(14) \quad (t_3): \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \sqrt{2t_3}.$$

From the first and second equations of (10), in a similar manner, we have

$$(15) \quad (t_1): \bar{x} = \bar{y} = t_1, \quad (t_2): \bar{x} = -\bar{y} = -t_2.$$

The equations (14) and (15) are those representing the required T.C.C.C. for (11). In this example, all the families of new curves (t_i) ($i = 1, 2, 3$) are degenerated into the rectilinear scales (Fig. 4).

Acknowledgement. The author wishes to express his hearty thanks to Prof. Dr. Katuhiko Morita, Kanazawa University, for his kind guidance.

Received December 29, 1977

Toyama Marine Merchant College,
Shinminato City, Toyama, Japan

REFERENCES

1. Matsuda A., Morita K., *Geometric Transformations between General Concurrent Charts and Tangential Contact Charts*. Aplikace Matematiky, **21**, 237—251 (1976).
2. Morita K., Matsuda A., *On a Certain Tangential Contact Circular Chart*. Proceedings of the 24 th Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 439—449, 1974.

TRANSFORMĂRI DE GRAFICE CONCURENTE ÎN GRAFICE CIRCULARE CU CONTACT TANGENȚIAL

(Rezumat)

Se studiază transformările de tipul (1) care realizează transformarea graficelor generale concurente în planul xy , în grafice circulare cu contact tangențial în planul $\bar{x}\bar{y}$, ambele în trei variabile.

ISOMORPHISMUSSÄTZE FÜR GRAPHEN

VON

CARMEN ZITRON

1. Einleitung. Ziel dieser Arbeit ist die Isomorphismussätze für die Graphen die mit einer Gruppestruktur vorgesehen sind, zu präsentieren.

Die benützte Terminologie ist diese von P. Ribenboim [1] eingeführte, die die usuelle Definition der gerichteten Graphen verallgemeinert.

In der Sektion 3 sind, derart, Isomorphismussätze für Graphen, die als universellen Algebren die mit einem bestimmten Typ von einstelligen Operationen vorgesehen sind, angegeben.

2. Definitionen und Bezeichnungen. Definition 1. Ein gerichteter Graph ist eine nicht-leere Menge Γ zusammen mit einer Teilmenge $X(\Gamma) \subset \Gamma$ und mit den Abbildungen $o, t: \Gamma \rightarrow X(\Gamma)$, sodaß wenn $x \in X(\Gamma)$ dann $o(x) = t(x) = x$.

Die Elemente von $X(\Gamma)$ heißen Eckpunkte und die Elemente $y \in Y(\Gamma) = \Gamma/X(\Gamma)$ heißen gerichtete Kanten mit dem Anfangspunkt $o(y)$ und dem Endpunkt $t(y)$.

Definition 2. Ein Graph Γ heißt involutiv wenn es eine Involution $z \rightarrow \bar{z}$ von Γ existiert, sodaß $o(\bar{z}) = t(z)$; $t(\bar{z}) = o(z)$ und $z = \bar{\bar{z}} \Leftrightarrow z \in X(\Gamma)$.

Definition 3. Ein Morphismus des Graphens Γ im Graphen Γ' ist eine Abbildung $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$, sodaß $f(X(\Gamma)) \subseteq X(\Gamma')$, $f(o(z)) = o'(f(z))$, $f(t(z)) = t'(f(z))$, $\forall z \in \Gamma$.

Wenn Γ und Γ' involutiv sind und $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für $\forall z \in \Gamma$, dann das Morphismus heißt involutiv.

Man bemerkt, daß die Zusammenstellung zweier Morphismen (oder involutiven Morphismen) ebenfalls ein Morphismus (involutives Morphismus) ist, sodaß man von der Graphenkategorie und in ihr, von der Teilkategorie der involutiven Graphen, sprechen kann.

Sätze (Sätze 1, 3, [1]). Es sei der Graph Γ , dann existieren der involutive Graph $\check{\Gamma}$ und ein Morphismus $g: \Gamma \rightarrow \check{\Gamma}$, sodaß:

1) wenn Δ ein arbiträrer involutiver Graph und $u: \Gamma \rightarrow \Delta$ ein Morphismus ist, dann existiert ein einziger Morphismus $u: \check{\Gamma} \rightarrow \Delta$, sodaß $u \circ g = u$;

2) wenn Γ', g' die gleichen Eigenschaften wie $\check{\Gamma}, g$ besitzen, dann existiert ein einziger Morphismus von involutiven Graphen $t: \check{\Gamma} \rightarrow \Gamma'$ sodaß $t \circ g = g'$.

Definition 4. Ein Gruppe-Graph heißt ein Graph Γ der Gruppe ist und für welchen die Abbildungen o und t Homomorphismen von Gruppen sind.

Definition 5. Eine Kongruenz ρ auf den Gruppe-Graphen $(\Gamma, X(\Gamma), o, t)$ ist eine Äquivalenz auf Γ mit den Eigenschaften:

a) ρ ist mit der Gruppenstruktur kompatibel;
 b) ρ ist ein Untergraph in $\Gamma_1 = (\Gamma \times \Gamma, X(\Gamma) \times X(\Gamma), o', t')$, wobei Γ_1 als Gruppe-Graph folgendermaßen organisiert ist:

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy'), \quad o'(x, y) = (o(x), o(y)), \quad t'(x, y) = (t(x), t(y)).$$

Definition 6. Wenn $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ein Gruppenmorphismus ist, dann wird sein Kern $\text{Ker } \varphi = \{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma, \varphi(x) = \varphi(y)\}$ definiert.

3. Isomorphismussätze für Graphen. Satz 1. Es seien die Gruppe-Graphen $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma_1$ ein Untergruppe-Graph in Γ , $\Phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ und $\Psi: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ Morphismen von Gruppe-Graphen. Dann:

1) $\Phi(\Gamma)$ ist ein Untergruppe-Graph in Γ' ;

2) Φ, Ψ ist ein Homomorphismus von Gruppe-Graphen.

Beweis. Weil Γ und Γ' Gruppen sind und Φ in partikulärem ein Gruppenmorphismus ist, prüft man direkt, daß $\Phi(\Gamma)$ eine Untergruppe in Γ' ist. Mehr noch, $\forall y \in \Phi(\Gamma) \Rightarrow \exists x \in \Gamma, y = \Phi(x) \Rightarrow \Rightarrow o'(y) = o'(\Phi(x)) = \Phi(o(x)) \in \Phi(\Gamma)$, gleichartig $t'(y) = \Phi(t(x)) \in \Phi(\Gamma)$, das beweist, dass die Beschränkungen der Abbildungen o', t' von Γ' bei $\Phi(\Gamma)$ diesen als Gruppe-Graph organisieren.

Der zweite Teil folgt durch direkter Rechnung, berücksichtigend daß die Zusammenstellung zweier Gruppenmorphisms ein Gruppenmorphismus ist und daß die Zusammenstellung zweier Graphenmorphisms ein Graphenmorphismus ist.

Satz 2. Es sei $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ein Morphismus von Gruppe-Graphen. Dann ist $\text{Ker } \varphi$ eine Kongruenz auf Γ .

Beweis. Man voraussetzt $(x, y), (x_1, y_1) \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y), \varphi(x_1) = \varphi(y_1) \Rightarrow \varphi(xx_1) = \varphi(yy_1)$ weil φ ein Gruppemorphismus ist $\Rightarrow \Rightarrow (xx_1, yy_1) \in \text{Ker } \varphi$, also die Äquivalenz Kern ist mit der Gruppenstruktur von Γ kompatibel.

Berücksichtigend, daß φ auch ein Morphismus von Graphen ist, folgt leicht die behauptete Folgerung.

Satz 3. Es seien $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ein surjektives Morphismus von Gruppe-Graphen und $\psi: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ ein Morphismus von Gruppe-Graphen. Dann finden die Behauptungen statt:

1) $\exists u: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ Gruppe-Graphmorphismus, sodaß $u \circ \varphi = \psi \Leftrightarrow \text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$ und wenn u existiert, dann ist er einzig;

2) u ist injectiv $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$;

3) u ist surjectiv $\Leftrightarrow \psi$ surjectiv.

Beweis. 1) Wenn $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$, definiert man $u: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ durch $u(\varphi(x)) = \psi(x)$, und man prüft direkt, daß u ein Morphismus von Gruppe-Graphen und, daß er einzig mit der Eigenschaft $u \circ \varphi = \psi$ ist.

Die Behauptungen 2) und 3) folgen leicht durch Anwendung von 1).

Bemerkung. Wenn $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ und $\psi: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ Epimorphismen von Gruppe-Graphen sind, daß $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$, dann existiert ein einziges bijektives Morphismus $u: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$, sodaß $u \circ \varphi = \psi$.

Satz 4 (Der erste Homomorphismussatz für Gruppe-Graphen). *Es sei $(\Gamma, X(\Gamma), o, t)$ ein Gruppe-Graph und ρ eine Kongruenz auf Γ . Dann kann man die Menge Quotient Γ/ρ als Gruppe organisieren, sodaß kanonische Surjektion $v: \Gamma \rightarrow \Gamma/\rho$ ein Morphismus von Gruppe-Graphen ist.*

Beweis. Es sei die kanonische Surjektion $v: \Gamma \rightarrow \Gamma/\rho$, dann $\text{Ker } v = \rho$. Man bezeichnet $\rho' = \rho \cap (x(\Gamma))^2$, dann ist ρ' eine Äquivalenz auf $X(\Gamma)$. Es wird das Diagramm, wobei v_1 durch $v_1(x) = [o(x)]^{\rho'}$ definiert ist (wenn ρ eine Äquivalenz auf die Menge X ist, dann für irgendwelcher $x \in X$ bezeichnet man $X^\rho = \{y \in X, (y, x) \in \rho\}$).

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{v} & \Gamma/\rho \\ v_1 \downarrow & & \downarrow \bar{o} \\ & \xrightarrow{\quad} & X(\Gamma)^{\rho'} \end{array}$$

niert ist (wenn ρ eine Äquivalenz auf die Menge X ist, dann für irgendwelcher $x \in X$ bezeichnet man $X^\rho = \{y \in X, (y, x) \in \rho\}$).

Weil $\text{Ker } v_1 = \rho' \subset \rho = \text{Ker } v$, folgt durch den Satz 3, daß das einzige Morphismus $\bar{o}$ existiert, sodaß $\bar{o} \circ v = v_1$, definiert durch $\bar{o}(x^\rho) = [o(x)]^{\rho'}$.

Gleichartig definiert man die Abbildung t und so wird $(\Gamma/\rho, \bar{o}, \bar{t})$ ein Graph.

Weil die Abbildungen o und t , definiert auf Γ Gruppenmorphisme waren, folgt das gleiche auch für $\bar{o}$ und $\bar{t}$, sodaß man vom Faktorgruppe-Graphen Γ/ρ sprechen kann.

Man prüft direkt, daß v dann ein Morphismus von Gruppe-Graphen ist.

Satz 5 (Der zweite Homomorphismussatz). *Es seien $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ein Morphismus von Gruppe-Graphen und $\text{Ker } \varphi = q$ eine Kongruenz auf Γ . Dann entwickelt sich φ in einem Morphismusprodukt von Gruppe-Graphen wobei f' ein bijektives Morphismus ist:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma' \\ v \downarrow & & \downarrow i \\ \Gamma/q & \xrightarrow{f'} & \varphi(\Gamma) \end{array}$$

Beweis. Gemäß dem ersten Homomorphismussatz weiß man, daß Γ/q ein Gruppe-Graph ist und v ein Morphismus von Gruppe-Graphen ist; aus Satz 1 folgt, daß $\varphi(\Gamma)$ ist ein Untergruppe-Graph in Γ' .

Durch i bezeichnet man die Abbildung Einschluß und f' ist durch $f'(x^q) = \varphi(x)$ definiert.

Man prüft leicht, daß f' ein bijektives Morphismus von Gruppe-Graphen ist.

Satz 6 (Der erste Isomorphismussatz). *Es sei Γ ein Gruppe-Graph, Γ_1 ein seiner Untergruppe-Graphen und q eine Kongruenz auf Γ . Dann:*

1) $\Gamma_1^q = \bigcup_{x_1 \in \Gamma_1} X_1^q$ ist ein Untergruppe-Graph in Γ ;

2) $q \cap \Gamma_1^q = q_1$ ist eine Kongruenz auf Γ_1 ;

3) $\Gamma_1/q_1 \cong \Gamma_1^q/q$.

Beweis. $\forall x \in \Gamma_1^q \Rightarrow \exists x_2 \in \Gamma_1, x \in X_1^q \Rightarrow (x, x_1) \in q$ Kongruenz $\Rightarrow (o(x), o(x_1)) \in q \rightarrow o(x) \in [o(x_1)]^q \subset \Gamma_1^q$.

Gleichartig $t(x) \in \Gamma_1^q$, also ist Γ_1^q ein Untergraph in Γ .

Weil Γ_1^q ein Untergruppe von Γ ist, folgt dank der Hypothese, daß q auch eine Gruppekongruenz ist.

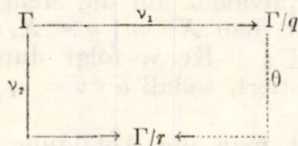
2) Durch Anwendung der Hypothesen q Kongruenz und Γ_1 Untergruppe-Graph, prüft man direkt, daß q_1 eine Kongruenz auf den Gruppe-Graphen Γ_1 ist.

3) Es seien Γ_1/q_1 der Faktorgruppe-Graph und $\theta : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma/q$ ein Morphismus von Gruppe-Graphen, dann :

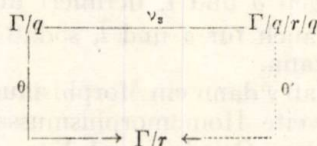
$$\text{Ker } \theta = q \cap \Gamma_1^q = q_1, \quad \theta(\Gamma_1) = \{x_1^q, x_1 \in \Gamma_1\} = \Gamma_1^q/q.$$

Aus dem zweiten Homomorphismussatz folgt $\Gamma_1^q/q \cong \Gamma_1/q_1$.

Satz 7 (Der zweite Isomorphismussatz). *Es seien Γ ein Gruppe-Graph und $q \subset r$ eine Kongruenz auf Γ . Dann existiert ein einziges Morphismus von Gruppe-Graphen $\theta : \Gamma/q \rightarrow \Gamma/r$ sodaß : $\theta \circ \nu_1 = \nu_2$*



und θ induziert ein bijektives Morphismus $\theta' : \Gamma/q/r/q \rightarrow \Gamma/r$, sodaß :



Beweis. Weil q und r Kongruenzen auf Γ sind, folgt, infolge des ersten Homomorphismussatzes, daß es die Gruppe-Graphen Γ/q und Γ/r , sowie auch die Morphismen ν_1 und ν_2 , existieren.

Weil $\text{Ker } \nu_1 = q \subset r = \text{Ker } \nu_2$, folgt, gemäß Satz 3, daß es ein einziger θ gibt, sodaß $\theta \circ \nu_1 = \nu_2$.

Man bezeichnet $\text{Ker } \theta = \frac{r}{q}$, dann ist $\frac{r}{q}$ eine Kongruenz in Γ/q und es existieren der Gruppe-Graph $\Gamma/q/r/q$ und dass Morphismus ν_3 von Gruppe-Graphen. Satz 3 führt, wieder, durch Anwendung am letzten Diagramm zur Existenz und Einmaligkeit des Isomorphismus θ' .

Eingegangen am 25. März 1978

Universität „Al. I. Cuza“, Jassy,
Lehrstuhl für Algebra, Geometrie
und mathematische Analyse

LITERATURVERZEICHNIS

1. Ribenboim P., *Graphs with Algebraic Structures*. Queen's Mathematical Preprint, No. 1973-7.

TEOREME DE IZOMORFISM PENTRU GRAFURI

(Rezumat)

Această Notă prezintă teoreme de izomorfism pentru grup-grafuri, introduse de P. Ribenboim [1], și care sînt privite ca algebre universale înzestrate cu un anumit tip de operații unare.

THE TYPE OF A n -PARAMETER SEMIGROUP OF LINEAR OPERATORS

BY

N. GRĂDINARU

We consider a Banach space Y and we denote $E_n^+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, x \neq \theta = (0, \dots, 0)\}$. Let $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, be n linear operators, nondepending on x , with the definition domain $D \equiv D(A_i)$ dense in Y and the range $R(A_i) \subset Y$, which commute on $\bigcap_{i=1}^n R(A_i) \cap D$.

Let

$$(S) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i u \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

be the „evolution system“ and the initial condition

$$(I) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \|u(x; u_0) - u_0\|_Y = 0,$$

where $u_0 \in Y$, is given and $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

In the work [2], it is defined the notion of Cauchy generalized problem, denoted by (P), for the system (S) — (I) and it is studied the relation between this problem and the n -parameter semigroups of linear operators (see also [3, Ch. 10, § 10.8 — 10]). In our paper we shall deduce some consequences with regard to the type of a semigroup given by Theorem V from [2].

Definition 1. Let u_0 be an element from Y . A function $u(x) = u(x; u_0): E_n^+ \rightarrow Y$ is called solution to the problem (P) if:

- i) u is absolutely continuous and continually differentiable in the strong sense on each n -dimensional, finite interval from E_n^+ ;
- ii) for each $x \in E_n^+$, $u(x) \in D$ and satisfies (S) — (I).

Definition 2. The solution $u(x)$ of the problem (P) is called of normal type $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ if:

$$(1) \quad \limsup_{x_i \rightarrow \infty} \frac{1}{x_i} \log \|u(x)\|_Y \leq \omega_i < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

for $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ arbitrary.

Theorem. *If the following conditions are satisfied:*

(a) *the linear operators A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, are closed, have the domain D dense in Y , and their resolvent set are not void;*

(b) *for each $u_0 \in D$, the problem (P) has a unique solution. Then the operator $A(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$ is the infinitesimal generator (i.g.) (see [3, Ch. 10, § 10.8–10] and [1]) of a semigroup $\{T(x), x \in E_n^+ \cup \{0\}\}$, so as to:*

$$(2) \quad T(x) u_0 = u(x; u_0) \text{ for every } x \in E_n^+.$$

We denote D' the Banach space (see the lemma from [2]) obtained by taking the norm $\|u\|' = \|u\|_Y + \sum_{i=1}^n \|A_i u\|_Y$ on D . The following consequences occur:

Consequence 1. Applying Theorem 3.1 from [4] it follows that the semigroup $\{T(x); x \in E_n^+ \cup \{0\}\}$ given by the above-mentioned theorem may be extended to a semigroup (similarly noted) of linear bounded operators on Y , of class C_0 and strongly continuous in x for $x \in E_n^+$.

Consequence 2. If, furthermore, we assume:

$$(3) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial u(x; u_0)}{\partial x_i} - A_i u_0 \right\| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad u_0 \in D,$$

where $u(x; u_0)$ is the solution of problem (P), then, according to (2) and Definition 1, it results that $\{T(x); x \in E_n^+ \cup \{0\}\}$ forms a semigroup of class C_0 on D' space with the i.g. $A(x)$.

Consequence 3. In the above-mentioned theorem we replace the (b) hypothesis by:

(b') for each $u_0 \in D$, the problem (P) has a normal type solution $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. In this case Theorem 1 assures the uniqueness of the normal type solution and the ascertainment of Theorem V from [2] stands right with the addition that $\{T(x); x \in E_n^+ \cup \{0\}\}$ is a semigroup of ω type in the sense that:

$$(4) \quad \|T(x) u_0\|_Y \leq K \exp \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) \|u_0\|_Y,$$

where K is a constant value and $x \in E_n^+$, $u_0 \in D$.

Indeed, (4) results from

$$(5) \quad T(x) = T_n(x_n) T_{n-1}(x_{n-1}) \dots T_1(x_1),$$

where $T((0, \dots, 0, x_i, 0, \dots)) = T_i(x_i)$ is a one-parameter semigroup with the i.g. A_i .

Consequence 4. In addition to Consequence 3 we assume that we have, for each solution of the normal type:

$$(6) \quad \limsup_{x_i \rightarrow \infty} \frac{1}{x_i} \log \|A_i u(x; u_0)\|_Y \leq \omega_i < \infty, \quad (i = 1, \dots, n),$$

for the arbitrary $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

Then the semigroup $\{T(x); x \in E_n^+ \cup \{0\}\}$ is of the ω type in the ordinary sense, that is $\|T(x)\|' \leq K_1 \exp\left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i\right)$, where K_1 is a constant value and $\|T(x)\|'$ is the norm of $T(x)$ related to the D' space.

Received September 20, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Grădinaru N., *Approximating Difference Schemes of Cauchy Problems for Evolution Systems and Approximation of two-parameter Semigroups of Linear Operators*. An. șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, Ser. I, Matematică, XIX, 161—173 (1973).
2. Haimovici A., *Sur une généralisation du problème de Cauchy*. Ann. Univ. Marie Curie-Skłodowska, XVII, 17, Sec. A, 123—131 (1963).
3. Hille E., Phillips R. S., *Functional Analysis and Semigroups*. Amer. Math. Soc., 1957.
4. Phillips R. S., *A Note on the Abstract Cauchy Problem*. Proc. Nat. Acad. of Sci., 40, 244 (1954).

TIPUL UNUI SEMIGRUP n -PARAMETRIC DE OPERATORI LINIARI

(Rezumat)

Pornind de la rezultate din [2] și [4] se studiază tipul unor semigrupuri n -parametrice de operatori liniari, în funcție de spațiul Banach considerat.

Then the subgroup $T(x)$ is a σ -subgroup of G if and only if x is a σ -element of G .
Let x and y be elements of G . Then $T(xy)$ is the intersection of $T(x)$ and $T(y)$.

Received November 1, 1972
Revised March 1, 1973

REFERENCES

1. G. A. Miller, *Groups and their representations*, 2nd ed., Macmillan, New York, 1948.
2. D. Gorenstein, *Finite groups and their representations*, Macmillan, New York, 1968.
3. D. Gorenstein, *Finite groups and their representations*, Macmillan, New York, 1968.
4. D. Gorenstein, *Finite groups and their representations*, Macmillan, New York, 1968.
5. D. Gorenstein, *Finite groups and their representations*, Macmillan, New York, 1968.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION

(Continued)

Published by the American Statistical Association, 1101 North 17th Street, Arlington, Virginia 22209.
Subscription price, \$12.00 per year in advance. Single copies, \$3.00 each.

UNE NOTE SUR UN THÉORÈME DE S. N. HUDSON

PAR

ILIE BURDUJAN

Dans cette Note on généralise le Théorème 1 de [4]. Utilisons les notations et les définitions de [2] et [3].

Soient Q un T_1 -espace, q_0 un élément fixé de Q , $H(Q)$ le groupe des homéomorphismes de Q dans lui même et S_0 le stabilisateur de q_0 . Notons par $H^*(Q)$ le groupe $H(Q)$ muni soit de la topologie de la convergence compacte (la c.o.-topologie), soit de la topologie τ_β (voir [1], pp. 42 et 49). L'application $J_0: H(Q) \rightarrow Q$, définie par $J_0(f) = f(q_0)$ étant continue, il résulte que $S_0 = J_0^{-1}(q_0)$ est un sous-groupe fermé de $H^*(Q)$. Soit $\pi: H^*(Q) \rightarrow H^*(Q)/S_0$ l'application canonique et $j: H^*(Q)/S_0 \rightarrow Q$ l'application définie par: $j(f \cdot S_0) = f(q_0)$. π est ouverte et continue et j est bijective et continue. Si Q est un quasigroupe topologique, alors $j^{-1} = \pi \circ C_L \circ R_{q_0}^{-1}$. Il résulte que j est un homéomorphisme de $H^*(Q)/S_0$ sur Q . On a:

Proposition 1. *Soit Q un quasi-groupe topologique. Alors:*

- l'application de composition est continue sur les ensembles $A_{[\varepsilon_1]} \times A_{[\varepsilon_2]}$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2$;*
- l'application $I: A_{[\varepsilon]} \rightarrow A_{[-\varepsilon]}$ définie par $I(f) = f^{-1}$ est un homéomorphisme de $A_{[\varepsilon]}$ sur $A_{[-\varepsilon]}$.*

Démonstration. Notons par b la restriction de l'application de composition à $L_Q \times L_Q$ ou à parties de $L_Q \times L_Q$. La continuité de composition sur $A_{[\varepsilon_1]} \times A_{[\varepsilon_2]}$ résulte immédiatement compte tenu de la relation $b = [C_{L^{\varepsilon_1}} \times C_{L^{\varepsilon_2}}] \circ (C_{L^{\varepsilon_1}} \times C_{L^{\varepsilon_2}})$. Puisque $C_{L^{\varepsilon}}$ et $C_{L^{-\varepsilon}}$ sont des homéomorphismes de Q sur $A_{[\varepsilon]}$ et respectivement sur $A_{[-\varepsilon]}$ et $I \circ C_{L^{\varepsilon}} = C_{L^{-\varepsilon}}$, il résulte que I est un homéomorphisme c.q.e.d.

Soient Q un espace topologique et $s: Q \rightarrow H(Q)$ une section (voir [2]). Posons $S = s(Q)$ et $S^\varepsilon = \{f^\varepsilon / f \in S\}$, où $\varepsilon = \pm 1$.

Définition 1. La section continue $s: Q \rightarrow H^*(Q)$ s'appelle admissible si satisfait aux conditions suivantes:

- s est un homéomorphisme de Q dans $S = s(Q)$;
- la composition est continue sur $S^{\varepsilon_1} \times S^{\varepsilon_2}$;
- l'application $I: S^\varepsilon \rightarrow S^{-\varepsilon}$ définie par $I(f) = f^{-1}$ est continue.

Définition 2. La section $s: Q \rightarrow H(Q)$ s'appelle strictement transitive sur Q si pour chaque x et chaque y de Q il existe seulement un élément $g \in S$ tel que $g(x) = y$.

D'après la Proposition 1 et les Définitions 1 et 2, il résulte que l'ap-

plication $s_1 = C_L \circ R_a^{-1} : Q \rightarrow H^*(Q)$ est une section admissible, strictement transitive sur le quasi-groupe topologique Q .

Prouvons maintenant le théorème qui généralise le Théorème 1 de S. N. Hudson (voir [4]).

Théorème 1. Soient Q un T_1 -espace, $f' : Q \rightarrow Q$ une application continue et ouverte et $q_0 \in Q$ un élément fixé. Si $s : Q \rightarrow H^*(Q)$ est une section admissible fixée, alors $S = s(Q)$ peut-être organisé comme quasi-groupe topologique à l'aide de l'opération :

$$x * y = \pi_S (f(x) \circ y) \quad \forall x, y \in S$$

où $f = s \circ f' \circ J_0$ et $\pi_S = s \circ J_0$. De plus f est une translation droite de ce quasi-groupe gauche. Si la section s est strictement transitive et f' est un homéomorphisme de Q dans lui-même, alors le quasi-groupe gauche S^* est quasi-groupe topologique.

Démonstration. On sait (voir [2]) que S^* est quasi-groupe gauche. Si s est strictement transitive et f est bijective, alors S^* est quasi-groupe. En utilisant la diagramme

$$S \times S \xrightarrow{f \times \text{id}_S} S \times S \xrightarrow{b} H^*(Q) \xrightarrow{\pi_S} S$$

il résulte que l'application „ $*$ “ est continue. Comme $\pi_S = s \circ j \circ \pi$, est ouverte et $j^{-1} = \pi \circ s$, il résulte que π_S est ouverte. Alors les applications $J_0 = s^{-1} \circ \pi_S$ et f seront aussi ouvertes. Soient $\alpha : S \times S \rightarrow S \times S$ et $\alpha^* : S \times S \rightarrow H^*(Q) \times S$ définis par les relations : $\alpha(x, y) = (x^*y, y)$ et $\alpha^*(g, h) = (g \circ h, h)$. On constate immédiatement que $\alpha = (\pi_S \times \text{id}_S) \circ \alpha^* \circ (f \times \text{id}_S)$. Ceci signifie que l'application α est continue et ouverte. Soient $a \not\parallel b$ la solution de l'équation $x * b = a$ et $a \parallel b$ la solution de l'équation $a * x = b$. Alors l'application $\gamma : (x, y) \rightarrow \gamma(x, y) = (x \not\parallel y, y)$ satisfait les relations $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha = \text{id}_{S \times S}$, c'est à dire α est un homéomorphisme. Alors l'application $\text{pr}_1 \circ \gamma : (x, y) \rightarrow x \not\parallel y$ est continue et ouverte. On sait (voir [2]) que $a \not\parallel b = \pi_S ([f(a)]^{-1} \circ b)$. Il résulte que $x \not\parallel y = (\pi_S \circ b \circ (I \times \text{id}_S) \circ (f \times \text{id}_S)) (x, y)$, c'est à dire l'application $(x, y) \rightarrow x \not\parallel y$ est continue. c.q.e.d.

Dans les conditions du Théorème 1, l'application J_0 est ouverte.

Proposition 2. Soient Q un espace topologique localement compact et q_0 un élément fixé de Q . S'il existe une section continue $s : Q \rightarrow H^*(Q)$, alors $H^*(Q)$ est homéomorphe à $Q \times S_0^*$.

Démonstration. Soit $\tilde{s} : H^*(Q) \rightarrow Q \times S_0^*$ définie dans [2]. On constate immédiatement que les applications $\text{pr}_1 \circ \tilde{s} = J_0$, $\text{pr}_2 \circ \tilde{s} = b \circ ((I \circ s \circ J_0) \times \text{id}_{H^*(Q)}) \circ \Delta$ et $\tilde{s}^{-1} = b \circ (s \times \text{id}_{S_0^*})$ (Δ étant l'application $x \rightarrow \Delta(x) = (x, x)$) sont continues, d'où la proposition.

Conséquence. Soit Q un quasi-groupe topologique localement compact. Alors L_0^* est homéomorphe à $Q \times I_0^*$, où $I_0^* = L_0 \cap S_0^*$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N., *Topologie générale*. Ch. 10, *Espaces fonctionnels*. Éd. Hermann, Paris, 1967.
2. Burdujan I., *Observations sur la géométrie des quasi-groupes* (en russe). Mat. Issled., Nauka, Kichinev, **39**, 40—54 (1976).
3. Burdujan I., *Groupes de transformations dans la théorie des quasi-groupes*. An. șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, **1** (1978).
4. Hudson S. N., *Transformation Groups Theory in the Theory of Topological Loops*. Proc. Amer. Math. Soc., **15**, 872—877 (1964).

O NOTĂ ASUPRA UNEI TEOREME A LUI S. N. HUDSON

(Rezumat)

În această Notă se generalizează parțial Teorema 1 din [4].

A NUMERICAL METHOD FOR PARAMETRIC OPTIMAL DESIGN

BY

E. J. HAUG and B. M. KWAK

In many instances, a mechanical system must operate over a range of load and environmental parameters. For example, applied loads on a structure may act over a range of positions and angular orientations, at each of which strength and displacement constraints must be satisfied. Operating temperature and excitation frequencies are other examples of environmental parameters that vary in known intervals, over which performance constraints must be satisfied. One cannot simply optimize for a given temperature and accept the performance that occurs at other temperatures. Rather, performance constraints must be satisfied at all temperatures.

A mathematical model for this class of optimal design problems is referred to as parametric optimal design, or in short POD, and is formulated as follows: choose the design parameter vector $b \in R^n$ to minimize

$$(1) \quad J = f(b),$$

subject to a set of equations that determine the state vector $z \in R^m$ uniquely, once α and b are fixed,

$$(2) \quad h_i(z, b, \alpha) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

and parametric constraints

$$(3) \quad \max_{\alpha \in A} g_\beta(z, b, \alpha) \leq 0, \quad \beta = 1, \dots, l,$$

where $A \equiv \{\alpha \mid q_i(\alpha) \leq 0, i = 1, 2, \dots, r\}$, $\alpha \in R^1$.

For the analytical development to follow, the maximization problem in the constraint of the POD problem is considered an inner problem of maximizing $g_\beta(z, b^0, \alpha)$ of Eq. 3, subject to Eq. 2 with $b = b^0$ the present design estimate. It is assumed that the number of local maximum points of g_β is finite. Since one can usually numerically or analytically solve for the local maximum points of this subproblem, the number of constraints can be expanded for each β to include every local maximum point. The number of such subproblems will be denoted by s .

Iterative desing algorithms for this class of problems have recently been presented by the authors [1], [2], based on varying degrees of preci-

sion of approximations of the problem. In the present development only first order approximations will be summarized. The basic idea in the development of the algorithm is to determine what constraints the inner problems place on allowable variations of the design variable. Once this information is available, one can use steepest descent or other iterative optimization techniques. The iterative procedure is as follows:

Step 1. Estimate b^0 , solve the inner problems, and denote the collection of maximum points of g_β in Eq. 3 by the vectors $\bar{\alpha}^\beta$ and $\bar{z}^\beta$.

When solutions of inner problems corresponding to the same constraint merge, one inner problem is removed.

Step 2. Check the constraints $g_\beta(\bar{z}_i, b^0, \bar{\alpha}_i^\beta) \geq 0$ for each solution $\bar{z}_i^\beta, \bar{\alpha}_i^\beta$ of each of the inner problems.

Step 3. Define the index set $I \equiv \{i | g_\beta(\bar{z}_i, b^0, \bar{\alpha}_i^\beta) \text{ for each } \beta\}$.

Step 4. Consider $g_j, j \in I$. For perturbations δb around b^0 , perturbations of $\bar{\alpha}$ and $\bar{z}$ must satisfy the first order approximate problem

$$(4) \quad \max \left(\frac{\partial g_j}{\partial z} \delta z + \frac{\partial g_j}{\partial b} \delta b + \frac{\partial g_j}{\partial \alpha} \delta \alpha \right) \leq \Delta g_j,$$

subject to

$$(5) \quad \delta h = \frac{\partial h}{\partial z} \delta z + \frac{\partial h}{\partial b} \delta b + \frac{\partial h}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0,$$

$$(6) \quad \delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha < 0,$$

where the derivatives are calculated at $\bar{\alpha}_j, \bar{z}_j$, and b^0 and Δg_j is the desired reduction in constraint violation, usually taken as $\Delta g_j = -g_j(\bar{z}, g^0, \bar{\alpha})$. This linearized subproblem may be viewed as a restriction on the variation δb , which must be made more explicit for calculation of solutions.

Since $\bar{\alpha}$ and $\bar{z}$ solve the inner problem with b^0 fixed, the following Kuhn-Tucker necessary conditions must be satisfied: There exist multipliers on $u_i \geq 0, i = 1, \dots, r$ such that Eq. 2 holds and

$$(7) \quad 0 = -\frac{\partial g_j}{\partial \alpha} + \lambda^T \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \mu^T \frac{\partial q}{\partial \alpha},$$

$$(8) \quad 0 = -\frac{\partial g_j}{\partial z} + \lambda^T \frac{\partial h}{\partial z},$$

$$(9) \quad \mu_i q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

From Eqs. (4), (5), (7), and (8), one may eliminate δz to obtain the reduced problem of finding δb to minimize

$$(10) \quad \delta f = \frac{\partial f}{\partial b} \delta b,$$

subject to

$$(11) \quad \max_{\delta\alpha} \left(\mu^T \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta\alpha \right) \leq - \left(\frac{\partial g_j}{\partial b} - \lambda^T \frac{\partial h}{\partial b} \right) \delta b + \Delta g_j,$$

$$(12) \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta\alpha \leq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Since $\mu_i \geq 0$ implies that $\mu^T (\partial q / \partial \alpha) \delta\alpha \leq 0$, so $\max_{\delta\alpha} \mu^T (\partial q / \partial \alpha) \delta\alpha \leq 0$.

However, the maximum value of zero can be achieved by $\delta\alpha = 0$. This observation eliminates explicit dependence in the linearized problem on $\delta\alpha$, so the constraint on δb is written only in terms of the design variable. The linearized problem of Eqs. (10) and (11), with $\delta\alpha = 0$ may be solved for a design improvement by imposing a stepsize constraint on δb , such that the first-order approximations are valid. Such a stepsize restriction is $\delta b^T W \delta b \leq \eta^2$, where W is a positive-definite weighting matrix.

With δb determined by Eqs. (10) and (11) with $\delta\alpha = 0$, an improved design is $b^1 = b^0 + \delta b$. One may now check for convergence and terminate, or return to Step 2, with b^0 replaced by b^1 . This first-order analysis leads to a simple computational scheme that justifies previously used alternating maximization and minimization procedures for the min-max problem, as discussed in detail in [1] and [2]. In the present treatment, no assumption of a saddle-point solution is necessary, as long as the functions involved are differentiable with respect to each of their arguments.

A number of parametric optimal design problems have been formulated and solved by the first-order algorithm, without excessive computational or analytical complexity [1], [2], [3]. A weapon allocation problem, a truss design problem, and a vibration isolator design problem are solved in [1]. Extensions of these problems are treated in [2] and a class of mechanism synthesis problems is solved in [3]. Theoretical and computational experience indicates that convergence is linear and that the method has the desirable characteristics of the gradient-projection method applied of nonlinear programming problems. The method appears to be reliably convergent, generally within 20 iterations.

Received December 30, 1977

University of Iowa,
College of Engineering, Iowa City,
Iowa, U.S.A.
and
Korea Advanced Institute of Sciences,
Seoul, South Korea

REFERENCES

1. Kwak B. M., Haug E. J., *Optimum Design in the Presence of Parametric Uncertainty*. Journal of Optimization Theory and Applications, 19, 4, 527-546 (1976).

2. Kwak B. M., Haug E. J., *Parametric Optimal Design*. Journal of Optimization Theory and Applications, 20, 1, 13—35 (1976).
3. Kwak B. M., Haug E. J., *Optimal Synthesis of Planar Mechanisms by Parametric Design Techniques*. Engineering Optimization, 2, 55—63 (1976).

METODĂ NUMERICĂ PENTRU PROIECTAREA OPTIMALĂ PARAMETRICĂ

(Rezumat)

Se prezintă o metodă numerică de rezolvare a unor probleme de proiectare optimală parametrică, care modelează comportarea sistemelor pentru care parametrii mediului înconjurător variază în anumite intervale.

SENSITIVITY SYNTHESIS OF OPTIMAL STRATEGIES FOR
DISTRIBUTED PARAMETER DIFFERENTIAL GAMES

II. SENSITIVITY GAMES

BY

VICTOR FLORIN POTERAȘU

1. Introduction. The sensitivity synthesis of optimal strategies by considering the combined systems, is studied [1]. It shows how the sensitivity depends on the original problems. For example, a saddle point can be sought for a performance index

$$(1) \quad J_s(f, g) = J(f, g) + k_4 \int_0^T v^2(t) dt.$$

It consider the sensitivity synthesis of optimal strategies for the game with terminal constraints. Sensitivity games may be thought that each player add a sensitivity constraint $v(T) = 0$ to compensate the violence of the terminal constraint, $u(T) = 0$ required by a rule of the game, in spite of the parameter variations. On the other hand, consider the optimal control problem for the system equations with an unknown function $g(t)$ and unknown system parameters. Then the minimax game is considered for the unknown function g which is supposed to be the opposite player to the control designer. Furthermore the sensitivity synthesis is considered to make up for the undesirable effects caused by small system parameter variations.

2. Sensitivity Games. For the game

$$(2) \quad \frac{du}{dt} + A(t)u = B_1 f + B_2 g, \quad t \in (0, T),$$

$$(3) \quad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_d,$$

$$(4) \quad J(f, g) = (k_2 f, f)_F - (k_3 g, g)_G;$$

the sensitivity game is stated as follows :

$$(5) \quad \frac{du}{dt} + A(t)u = B_1 f + B_2 g, \quad t \in (0, T),$$

$$(6) \quad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_d,$$

$$(7) \quad \frac{dv}{dt} + A(t)v + A_a(t)u = B_{1a}f + B_{2a}g, \quad t \in (0, T),$$

$$(8) \quad v(0) = 0, \quad v(T) = 0,$$

$$(9) \quad J_S(f, g) = (k_2 f, f)_F - (k_3 g, g)_G.$$

The β and δ -sensitivity games can be similarly stated.

Let us consider a following actual system:

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + aAu(t, x) = b_1 f(t, x) + b_2 g(t, x) \quad \text{in } Q,$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_A} u(t, x) + \beta(t, x) u(t, x) = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$

where A is given by

$$A(t)u = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad \beta(t, x) \geq 0 \quad \text{on } \Sigma \quad \text{and } f, g \in L^2(0).$$

A cost function is given by

$$(11) \quad J = \int_0^T \int_{\Omega} [k_1 f^2(t, x) - k_2 g^2(t, x)] dt dx.$$

Case I. a is a variable parameter. The sensitivity equation for a variable parameter a becomes

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + aAv(t, x) + Au(t, x) = 0 \quad \text{in } Q,$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_A} v(t, x) + \beta(t, x) v(t, x) = 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

The sensitivity game has solution if $b_1^2/k_1 - b_2^2/k_2 \neq 0$ and the system

$$\frac{\partial u}{\partial t} + aAu = b_1 f \quad \text{in } Q,$$

$$(13) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + aAv + Au = 0 \quad \text{in } Q,$$

$$u(0, x) = 0, \quad v(0, x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \beta u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu_A} + \beta v = 0 \quad \text{on } \Sigma$$

is controllable at a time T . The system (13) is controllable at time T as $u(T, x; f)$ and $v(T, x; f)$ generate respectively dense subspaces of $L^2(Q)$. To see this, define Φ, Ψ such that

$$(14) \quad \int_{\Omega} u(T, x; f) \Phi(x) dx = 0, \quad \Phi \in L^2(\Omega) \quad \forall f,$$

$$(15) \quad \int_{\Omega} v(T, x; f) \Psi(x) dx = 0, \quad \Psi \in L^2(\Omega) \quad \forall f.$$

It introduce p and q as the solutions of

$$(16) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + aA^*p + A^*q = 0 \text{ in } Q, \quad p(T, x) = \Phi(x),$$

$$(17) \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + \beta p = 0 \text{ on } \Sigma,$$

$$(18) \quad -\frac{\partial q}{\partial t} + aA^*q = 0 \text{ in } Q, \quad q(T, x) = \Psi(x),$$

$$(19) \quad \frac{\partial q}{\partial \nu_{A^*}} + \beta q = 0 \text{ on } \Sigma.$$

Then

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \left(-\frac{\partial p}{\partial t} + aA^*p + A^*q \right) u(f) dt dx + \int_Q \left(-\frac{\partial q}{\partial t} + aA^*q \right) v(f) dt dx = \\ &= \int_Q p \left(\frac{\partial u}{\partial t} + aAu \right) dt dx + \int_Q q \left(\frac{\partial v}{\partial t} + aAv + Au \right) dt dx - \\ &- \int_{\Omega} \Phi(x) u(T, x; f) dx - \int_{\Omega} \Psi(x) v(T, x; f) dx = b_1 \int_Q p f dt dx \quad \forall f; \end{aligned}$$

hence $p = 0$. From this and (16), $A^*q = 0$. If $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots$); λ_i being eigenvalues of A , then $q = 0$. Therefore $\Phi = 0$ and $\Psi = 0$.

Case 2. b_1 is a variable parameter. Let $a = 1$. The sensitivity equation for a variable parameter b_1 becomes

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + Av(t, x) = f(t, x) \text{ in } Q, \quad v(0, x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_A} v(t, x) + \beta(t, x) v(t, x) = 0 \text{ on } \Sigma.$$

It shall show that the existence of the solution of the sensitivity game follows and moreover the sensitivity function $v(t, x) = 0$, in Q .

Introduce the adjoint system

$$(21) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p &= 0 \text{ in } Q, & \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + \beta p &= 0, \text{ on } \Sigma, \\ -\frac{\partial q}{\partial t} + A^*q &= 0 \text{ in } Q, & \frac{\partial q}{\partial \nu_{A^*}} + \beta q &= 0, \text{ on } \Sigma \end{aligned}$$

and suppose that strategies f and g are given by

$$(22) \quad f = -\frac{1}{k_1} (b_1 p + q), \quad g = \frac{1}{k_2} b_2 p.$$

The solution of (21) is described by

$$(23) \quad p = U^*(T, t)p_T, \quad q = U^*(T, t)q_T, \quad p_T, q_T \in L^2(\Omega).$$

By using (22) and (23), $u(T)$ and $v(T)$ are given by

$$(24) \quad u(T) = \int_0^T U(T, t) U^*(T, t) dt \left[\left(-\frac{b_1^2}{k_1} + \frac{b_2^2}{k_2} \right) p_T - \frac{b_1}{k_1} q_T \right],$$

$$(25) \quad v(T) = \int_0^T U(T, t) U^*(T, t) dt \left(-\frac{b_1}{k_1} p_T - \frac{1}{k_1} q_T \right).$$

Since

$$(26) \quad \int_0^T U(T, t) U^*(T, t) dt > 0,$$

$$(27) \quad -\frac{1}{k_1} (b_1 p_T + q_T) = 0 \text{ in } \Omega,$$

which makes $v(T) = 0$. From this it follows that $f = 0$, $v = 0$ in Q . Then

$$(28) \quad u(T) = \int_0^T U(T, t) U^*(T, t) dt \frac{b_2^2}{k_2} p_T.$$

Hence the existence of the solution of the sensitivity game follows if $b_2 \neq 0$, and the sensitivity function $v(t, x)$ and the control $f(t, x)$ vanish in Q . This result holds for the game in which b_2 is a variable parameter. Then if $b_1 \neq 0$, the sensitivity function $v(t, x)$ and the control $g(t, x)$ vanish in Q .

Case 3. $u_0(x)$ is a variable initial function. Let $u(0, x) = u_0(x)$ in (13). The β -sensitivity equation becomes

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + Aw(t, x) = 0 \text{ in } Q, \quad w(0, x) = h(x) \quad h \in L^2(\Omega),$$

$$\frac{\partial}{\partial v_A} w(t, x) + \beta(t, x) w(t, x) = 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

From this form, it is clear that the combined system is not controllable. Hence the sensitivity games does not have a solution.

Case 4. ε is a small time delay parameter. Consider an actual system described by

$$(29) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + Au(t, x) + u(t - \varepsilon, x) = b_1 f(t, x) + b_2 g(t, x) \quad \text{in } Q,$$

$$(30) \quad u(t, x) = h(t, x), \quad t \in (-\varepsilon, 0), \quad u(0, x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$(31) \quad \frac{\partial}{\partial v_A} u(t, x) + \beta(t, x) u(t, x) = 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

The δ sensitivity equation becomes

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial t} z(t, x) + Az(t, x) + z(t, x) + Au(t, x) + u(t, x) = b_1 f(t, x) + b_2 g(t, x),$$

$$(33) \quad z(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial v_A} z(t, x) + \beta(t, x) z(t, x) = 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

From a similar consideration as Case 1, it follows that the sensitivity game has a solution if

$$\frac{b_1^2}{k_1} - \frac{b_2^2}{k_2} \neq 0 \quad \text{and} \quad \lambda_i \neq -1 \quad (i = 1, 2, \dots); \quad \lambda_i \text{ being eigenvalues of } A.$$

3. Numerical Results. In this section it shall show that the sensitivity synthesis is superior to the conventional one by giving several numerical examples.

Example 1. α -variation. Consider the following game with a terminal constraint $u(1, x) = \sin \pi x$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + bf(t, x) + cg(t, x), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (k_1 f^2 - k_2 g^2) dt dx.$$

Numerical results for a variable parameter a with its nominal value $a_n = 0.1$ are shown in Fig. 1 where $b = 2.0$, $c = 1.0$ and $k_1 = k_2 = 1.0$. Fig. 1 shows the state trajectories at $x = 0.5$ of both the actual system

($a = 0.11$) and the model system ($a = 0.1$) corresponding to the conventional synthesis and the sensitivity synthesis with a sensitivity constraint $v(t, x) = 0$. The optimal performance costs are 0.191 for the conventional synthesis and 0.520 for the sensitivity synthesis.

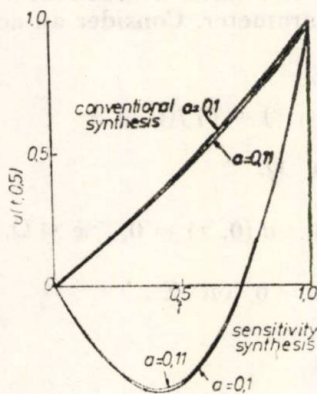


Fig. 1

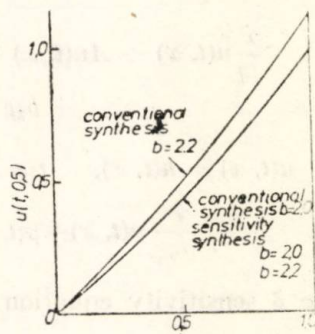


Fig. 2

Numerical results for a variable parameter b with its nominal value $b_n = 2.0$ are shown in Fig. 2, where $a = 0.1$, $c = 0.1$, $k_1 = k_2 = 1.0$ and the actual value of a parameter b is 2.2. The optimal performance costs are 0.191 for the conventional synthesis and -0.573 for the sensitivity synthesis. Fig. 2 shows that the state trajectory for the sensitivity synthesis does not depend on the variation of the parameter b .

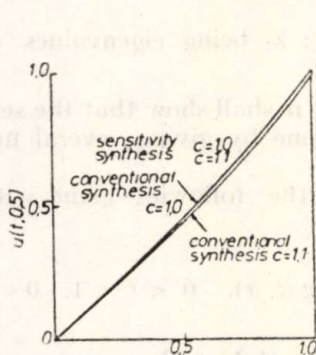


Fig. 3

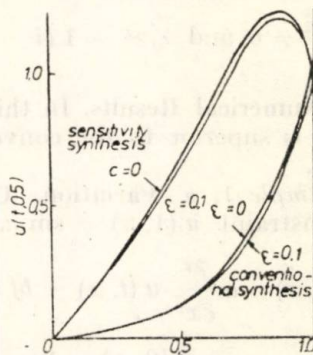


Fig. 4

Numerical results for a variable parameter c with its nominal value $c_n = 1.0$ are shown in Fig. 3 where $a = 0.1$, $b = 2.0$, $k_1 = k_2 = 1.0$ and the actual value of a parameter c is 1.1. The optimal performance costs are 0.191 for the conventional synthesis and 0.143 for the sensitivity synthesis. Fig. 3 also shows that the state trajectory for the sensitivity synthesis does not depend on the variation of the parameter c .

Example 2. δ -variation. Consider the following time delay game with a terminal constraint $u(1, x) = \sin \pi x$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + u(t - \varepsilon, x) + b_1 f(t, x) + b_2 g(t, x),$$

$$0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(t, x) = 0, \quad -\varepsilon \leq t \leq 0, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (k_1 f^2 - k_2 g^2) dt dx.$$

Numerical results for the nominal value $\varepsilon_n = 0$ are shown in Fig. 4 where $a = 0.01$, $b = 2.0$, $c = 1.0$ and $k_1 = k_2 = 1.0$. Fig. 4 shows the state trajectories at $x=0.5$ of both the actual system ($\varepsilon = 0.1$) and the model system ($\varepsilon = 0$) corresponding to the conventional synthesis and the sensitivity synthesis with a sensitivity constraint $z(1, x) = 0$. The optimal performance costs are 0.657 for the conventional synthesis and 1.333 for the sensitivity one.

4. Conclusions. 1. The differential games presented can be applied to make minimax synthesis for the optimal control problems of the system with unknown functions which may be in some sense large. Then the sensitivity games can be applied to compensate the violence of the state constraints against the parameter variations in some sense small.

2. The numerical results have shown that there is a possibility to reduce minimax performance costs by the sensitivity synthesis. Moreover it has been shown that the sensitivity synthesis can be also considered for the control parameter variations. In these points the sensitivity synthesis for the game is different from that for the ordinary optimal control problems.

Received December 19, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Poterașu V. F., *Sensitivity Synthesis of Optimal Strategies for Distributed Parameter Differential Games* (I). Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3-4, s. I., 49-52 (1977).
2. Tomovic R., Vukobratovic M., *Opsta teorija osetljivosti*. Institut „Kirilo Savic“, Beograd, 1969.
3. Kuhn H. W., Szegö G. P., *Differential Games and Related Topics*. North Holland, 1971.
4. Westphal L. C., Stubberud A. R., *On the Computation of Solutions of Certain Dynamic Games*. Int. J. Control, 21, 2, 193-202 (1975).
5. Grote J. D. (Ed.), *The Theory and Application of Differential Games*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland/Boston - USA; Series C: Mathematical and Physical Sciences, 1975.

SINTEZA SENZITIVITĂȚII STRATEGIILOR OPTIMALE PENTRU JOCURI
DIFERENȚIALE CU PARAMETRI DISTRIBUIȚI

II. Jocuri senzitive

(Rezumat)

S-au studiat jocurile diferențiale cu parametri distribuiți în legătură cu sensibilitatea strategiilor optimale. Se prezintă rezultate numerice care arată posibilitatea de a reduce funcționala de performanță minimax prin sinteza sensibilității. În plus se arată că sinteza sensibilității se poate considera pentru variația parametrilor de control. Jocurile diferențiale prezentate aici se pot aplica pentru a face sinteza minimax pentru probleme de control optimal al sistemelor cu funcții necunoscute care pot fi într-un anumit sens mari. Teoria și aplicațiile prezentate se pot aplica la mult mai complicatele dar interesante probleme de sensibilitate pentru jocuri diferențiale cu mai mulți jucători cu suma nenulă.

ON THE SOLUTIONS OF SOME INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

MARICA LEWIN

We have the stochastic integral equation of the form

$$(1) \quad x(t, \omega) = h(t, \omega) + \int_0^t k_1(t, s, \omega) f(s, x(s)) ds + \int_0^t k_2(t, s, \omega) G(s, x) dW,$$

where (Ω, U, P) is a probability space, $W(s, \omega)$ is a Brownian motion on (Ω, U, P) , $B_+ = \mathcal{U}(W_s - W_t, s \geq t)$ (the σ -algebra generated by $W_s - W_t$), $h(t, \omega)$, $k_1(t, s, \omega)$, $k_2(t, s, \omega)$ are measurable stochastic processes independent of $B_+ = \mathcal{U}(W_s - W_t, s \geq t)$. $k_1(t, s, \omega)$, $k_2(t, s, \omega)$, are continuous functions from R^2 into $L_\infty(\Omega, U, P)$.

We know that such an equation has a unique solution in a Banach space $D \subset C_2(R_+, L_2(\Omega, U, P))$, the space of the continuous functions defined on R_+ , with values in

$$L_2(\Omega, U, P) = \left\{ x(t, \omega), \int_\Omega |x(t, \omega)|^2 dP(\omega) < \infty \right\} \text{ for every } t \geq 0.$$

When the following conditions are fulfilled:

a) B, D are two Banach spaces $B, D \subset C_2 = C(R_+, L_2(\Omega, U, P))$, stronger than C_2 , so that they are admissible with respect to the operator

$$T_x = \int_0^t k_1(t, x, \omega) x(s) ds \quad (\text{that } TB \subset D).$$

b) B_1 is a Banach space from $C_4 = C(R, L_4(\Omega, U, P))$ so that (B_1, D) are admissible with respect to the operator

$$T_2 x = \int_0^t k_2(t, s, \omega) x(s) ds.$$

c) $x(t, \omega) \rightarrow f(t, x(s))$ is an operator on $S = \{x(t, \omega), x(t, \omega) \in D, \|x(t, \omega)\|_D \leq \rho\}$ with values in B , which satisfies: $\|f(t, x) - f(t, y)\|_B \leq \lambda_1 \|x - y\|_D$ for $x, y \in S$, λ_1 constant.

d) $x(t, \omega) \rightarrow G(t, x)$ is an operator defined on S , with values in B and $\|G(t, x) - G(t, y)\|_{B_1} \leq \lambda_2 \|x(t, \omega) - y(t, \omega)\|_D$.

e) $h(t, \omega) \in D$, and $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \leq 1$, where $K_1 = \|T_1\|$, $K_2 = \|T_2\|$,

$$\|h(t, \omega)\|_D + \|f(t, 0)\|_B + \|G(t, 0)\|_{B_1} \leq (1 - \lambda_1 K_1 - \lambda_2 K_2) \rho.$$

We defined a solution of Eq (1) as a measurable stochastic process, so that:

- a) the integrals of Eq. (1) are meaningful for every $t \geq 0$;
- b) the equation is verified almost everywhere;
- c) $E x^2(t, \omega) < \infty$.

Definition 1. By $C_{2g} = C_2(R, L_2(\Omega, U, P))$ we shall note the Banach space of all continuous functions from R_+ into $L_2(\Omega, U, P)$, so that

$$\left(\int_{\Omega} |x(t, \omega)|^2 dP(\omega) \right)^{1/2} \leq A_g(t), \quad A \geq 0,$$

$g(t)$ is a continuous function on R_+ , $g(t) \geq 0$. The norm of C_{2g} is defined as

$$\|x(t, \omega)\|_{C_{2g}} = \sup_{0 \leq t} \left\{ \frac{1}{g(t)} \|x(t, \omega)\|_{L_2(\Omega, U, P)} \right\}.$$

Similarly we define C_{4g} .

Definition 2. C is the Banach space of all continuous functions from R_+ into $L_2(\Omega, U, P)$, bounded on this space, that is the space with the norm $\sup_{0 \leq t} \|x(t, \omega)\|_{L_2(\Omega, U, P)}$.

We shall show, that with some conditions Eq. (1) has a solution in C .

Theorem 1. Let us consider the equation (1) fulfilling the following conditions:

1) $\exists A \in R, A > 0$, and a continuous function $g(t) > 0$ on R_+ , so that

$$\int_0^t \| \| k_1(t, s, \omega) \| \| g(s) ds \leq N \text{ where } \| \| k_1(t, s, \omega) \| \| = \| k_1(t, s, \omega) \|_{L_\infty(\Omega, U, P)};$$

$$2) \int_0^t \| k_2(t, s, \omega) \|_{L_4}^2 g^2(s) < \infty, \quad \forall t \in R_+;$$

3) $f(t, x), G(t, x)$ are continuous functions on (t, x) so that $f(t, 0) \in C_{2g}(R_+, R)$, $G(t, 0) \in C_{4g}(R_+, R)$ and satisfy the following conditions:

$$|f(t, s) - f(t, y)| \leq \lambda_1 g(t) |x - y|,$$

$$|G(t, x) - G(t, y)| \leq \lambda_2 g(t) |x - y|;$$

$h(t, \omega)$ is a bounded continuous functions on R_+ , with values in $L_2(\Omega, U, P)$.

Proof. We shall prove that the Banach spaces $(C_{2\beta}, C)$, $(C_{4\beta}, C)$, respectively are admissible with respect to the operator T_1 , respectively T_2 , defined above. For T_1 , is proved in [3].

We shall prove for T_2 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\int_0^t k_2(t, s, \omega) x(s, \omega) dW \right)^2 dP = E \left(\int_0^t k_2(t, s, \omega) x(s, \omega) \right)^2 = \\ & = \int_0^t E(k_2(t, s, \omega) x(s, \omega))^2 ds \leq \int_0^t (E(k_2(t, s, \omega))^4)^{1/4} \cdot \frac{(Ex^4(s, \omega))^{1/4}}{g(s)^2} g^2(s) ds \leq \\ & \leq \|x(t, \omega)\|_{C_{4\beta}} \int_0^t \|k_2(t, s, \omega)\|_{L_4}^2 g^2(s) ds, \end{aligned}$$

so the spaces $(C_{4\beta}, C)$ are admissible with respect to T_2 .

Now we shall consider the differential Ito equation

$$(2) \quad dx(t, \omega) = [A(\omega)x(t, \omega) + f(t, x(t, \omega))] dt + G(t, x) dW,$$

where $x(t, \omega)$ is a function from $R \times \Omega$ with values in R_n , $G(t, x)$, $f(t, x)$ are functions defined on $R \times R_n$ with values in R^n , having the properties stated above. Moreover, $f(t, 0) = 0$, $G(t, 0) = 0$. $A(\omega)$ is a $n \times n$ matrix, measurable with respect to P .

We suppose that $A(\omega)$, $c(\omega)$ are independent of the σ -algebra $B_t^+ = \{W(s) - W(t), s \geq t\}$, and the matrix $A(\omega)$ is stochastically stable, that is $\exists \alpha > 0$, so that $P(\omega, R_e(\psi_k(\omega)) < \alpha, k = \overline{1, n}) = 1$ where ψ_k are the characteristics roots of $A(\omega)$.

First, Eq. (2) is equivalent to the integral equation:

$$(3) \quad x(t, \omega) = e^{At} \left(C + \int_0^t e^{-As} f(s, x) ds + \int_0^t e^{-As} G(s, x(s)) dW \right).$$

If we note by $y(t)$ the expression within brackets, the process $y(t)$ has the stochastic differential

$$dy(t) = e^{-At} f(t, x) dt + e^{-At} G(t, x) dW.$$

Using the differentiation theorem of Ito for the process $x(t) = e^{At} y$, we obtain Eq. (2).

The equation (3) is of the form (1), where

$$h(t, \omega) = e^{At} C, \quad k_1(t, s, \omega) = e^{A(\omega)(t-s)}, \quad k_2(t, s, \omega) = e^{A(\omega)(t-s)},$$

functions which fulfil all the conditions of the Theorem 1. We shall consider $C_2\beta = C_g(R_+, L_2(\Omega, U, P))$, with $g(t) = e^{-\beta t}$, $0 < \beta < \alpha$ and $C_{4\beta} = C_g(R_+, L_4(\Omega, U, P))$.

We show that $(C_{4\beta}, C_{2\beta})$ are admissible with respect to the operator

$$T_2 x = \int_0^t e^{A(t-s)} x(s, \omega) dW.$$

The admissibility of $(C_{2\beta}, C_{2\beta})$ with respect to T_1 is proven by means of the properties of the Wiener integral:

$$\begin{aligned} \|T_2 x\|_{L_2(\omega, U, P)}^2 &= E \left(\int_0^t e^{A(t-s)} x(s) dW \right)^2 = \int_0^t E (e^{A(t-s)} x(s))^2 ds \leq \\ &\leq \int_0^t (E (e^{A(t-s)})^4)^{1/2} [E (x(s))^4]^{1/2} ds. \end{aligned}$$

It is proven also that there is a subset $D \subset \Omega$ with $P(D) = 1$, so that for every $\omega \in D$, $\|e^{A(t-s)}\|_{R^n} \leq k e^{-\alpha(t-s)}$, $k > 0$ so, for $\omega \in D$

$$\begin{aligned} \|T_2 x\|_{L_2(\Omega, U, P)}^2 &\leq \int_0^t (E k e^{-4\alpha(t-s)})^{1/2} (E x^4)^{1/2} ds \leq k \|x\|_{C_{4\beta}}^2 \int_0^t e^{-2\alpha t} e^{2s(\alpha-\beta)} ds \leq \\ &\leq k (\alpha - \beta)^{-1} e^{-2\beta t} \|x\|_{C_{4\beta}}^2, \end{aligned}$$

that means $\sup_{s < t} \|T_2 x\|_{L_2} e^{\beta t} \leq M \|x\|_{C_{4\beta}}^2$ that is $(C_{4\beta}, C_{2\beta})$ are admissible with respect to T_2 .

Applying Theorem 1, there is a solution of the equation (3) which belongs to $C_{2\beta}$, that is:

$$(4) \quad \sup_{0 \leq s \leq t} e^{\beta s} (E x^2(s, \omega))^2 < \infty.$$

Because $\beta > 0$, (4) implies $\lim_{t \rightarrow \infty} E x^2(t, \omega) = 0$.

Remark. It is not necessary to suppose the measurability of the processes $x(t, \omega)$, $h(t, \omega)$, $k_1(t, s, \omega)$, $k_2(t, s, \omega)$ in (t, s) and (s, ω) respectively.

We know that $x(t, \omega) \in (R_+, L_2(\Omega, U, P))$. The continuity in mean square implies that $x(t, \omega)$ is a stochastically continuous process, that is

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} P(|x(t, \omega) - x(t_1, \omega)| > \varepsilon) = 0.$$

We obtain (5) by means of the Tchebysheff inequality.

Now, we can apply the

Theorem. *If a process $x(t, \omega)$ is defined on $[t_0, T]$ and $(0, \infty)$ respectively and is stochastically continuous at all points $t \in (t_0, T)$, with the possible exception of a finite number of points, then there exists a separable measurable process that is stochastically equivalent to the process $x(t, \omega)$.*

So, the process $x(t, \omega)$ which belongs to $C(R_+, L_2(\Omega, U, P))$ is measurable, and because both Ω and R_+ are spaces with σ -finite measure,

one can apply the Fubini theorem, which implies that the integrals of the equation (1) are meaningful (the first as a Lebesgue integral, the second as an Ito integral).

Received November 25, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Corduneanu C., *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*. Academic Press, New York — London, 1973.
2. Tsokos C., *On a Stochastic Integral Equation of the Volterra Type*. Mathematical Systems Theory, **3**, 3 (1969).
3. Morozan T., *Stability of Linear Systems with Random Parameters*. J. Diff. Equations, **3** (1967).
4. Gheorghiu N., *Introducere în analiza funcțională*. Ed. Acad. R.S.R., 1974.
5. Skorokhod A. V., *Studies in the Theory of Random Processes*. Addison-Wesley Publ. Co., 1965.
6. Precupanu A., *Analiză matematică. Funcții reale*. Buc., 1976.

ASUPRA SOLUȚILOR UNOR ECUAȚII INTEGRALE ȘI DIFERENȚIALE

(Rezumat)

Această Notă are ca scop demonstrarea existenței și unicității soluției unor ecuații stohastice integrale și diferențiale, în anumite spații de funcții, folosind metoda admisibilității introdusă de C. Corduneanu.

one can apply the Leibniz theorem which implies that the integrals of the
equation (1) are meaningful (the first as a Lebesgue integral, the second
as an Ito integral).

Received November 10, 1977
Department of Mathematics
University of Houston, Texas

REFERENCES

1. Gordon, R. P., *Integral Equations and Stability of Linear Systems*, Academic Press,
New York-London, 1975.
2. Titchmarsh, E. W., *On a Class of Integral Equations of the Volterra Type*, *Journal of
Mathematics*, 1937, 2, 1-17.
3. Marichev, O. I., *Handbook of Integral Equations*, Vol. 1, Marcel Dekker,
New York, 1977.
4. Marichev, O. I., *Handbook of Integral Equations*, Vol. 2, Marcel Dekker, 1978.
5. Marichev, O. I., *Handbook of Integral Equations*, Vol. 3, Marcel Dekker, 1979.
6. Marichev, O. I., *Handbook of Integral Equations*, Vol. 4, Marcel Dekker, 1980.

RESUME / SUMMARY / NOTAS AL TEXTO / IN DISCUSSION

(Received)

Abstract: This note is devoted to the study of the integral equation of the Volterra type
with a kernel of the form $K(t,s) = \exp(-\lambda(t-s))$, where λ is a complex number.
The results are given in the form of theorems and lemmas.

EVALUAREA PRECIZIEI VECTORULUI DEPLASĂRII CONSTRUCȚIILOR DETERMINAT PRIN MĂSURĂRI INDIRECTE PONDERATE

DE

GH. NISTOR și ANETA BRAIER

1. Introducere. În lucrarea [4] s-a exprimat vectorul deplasării construcțiilor în funcție directă de elementele măsurate pe teren, prin relația :

$$(1) \quad X_{k1} = -Z_{kn} L_{n1},$$

sau

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \vdots \\ \Delta X_N \\ \Delta Y_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k-1,1} & Z_{k-1,2} & \dots & Z_{k-1,n} \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & Z_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix}.$$

Vectorul deplasării orizontale, corespunzător fiecărui ciclu de observații, se va obține prin înmulțirea matricei Z_{kn} , de mărime constantă, cu vectorul termenilor liberi L_{n1} , ale cărui elemente se obțin direct din diferența unghiurilor orizontale măsurate în cele două cicluri de observații considerate.

Lucrarea de față completează pe [4], stabilind posibilitățile de evaluare a preciziei rezultatelor obținute.

2. Stabilirea relațiilor de calcul. La evaluarea preciziei este necesar a se calcula următoarele elemente: eroarea unității de pondere, erorile medii pătratice ale componentelor deplasării, erorile medii pătratice ale vectorilor deplasării, eroarea medie pătratică a unei funcții de elementele compensate, semiaxele și orientările elipselor erorilor.

Eroarea medie pătratică a unității de pondere este dată de relația :

$$(3) \quad m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{n - k}},$$

unde

$$(4) \quad V^T P V = V_{1n}^T P_{nn} V_{n1} = L_{1n}^T P_{nn} L_{n1} + X_{1k}^T A_{kn}^T P_{nn} L_{n1}.$$

Eroarea unității de pondere este eroarea medie pătratică a diferenței unghiurilor orizontale măsurate în două cicluri de observații. Mărimea ei caracterizează condițiile de măsurare, adică precizia rezultatelor măsurării.

Eroarea medie pătratică de măsurare a unui unghi orizontal va fi

$$(5) \quad m_{\alpha} = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2}},$$

iar eroarea medie pătratică a unei direcții

$$(6) \quad m_d = \pm \frac{m_0}{2}.$$

Deoarece erorile medii pătratice ale componentelor deplasării sînt funcții de erorile medii pătratice ale termenilor liberi, pentru evaluarea preciziei se exprimă vectorul deplasării printr-o funcție liniară de termenii liberi ai ecuațiilor de deformație.

Eroarea medie pătratică a unei funcții de n variabile aleatoare este

$$(7) \quad M_X^2 = \left[\frac{\partial(X)}{\partial(L)} \right] m_0^2 \left[\frac{\partial(X)}{\partial(L)} \right]^T.$$

Prin derivarea lui (1), în raport cu variabilele aleatoare ce compun vectorul termenilor liberi, rezultă pentru matricea M_X^2 expresia

$$(8) \quad M_X^2 = Z_{kn} m_0 Z_{nk}^T,$$

sau

$$(9) \quad \frac{M_X^2}{m_0^2} = Z_{kn} Z_{nk}^T.$$

Se calculează produsul matricelor

$$Z_{kn} Z_{nk}^T = Q_{kk} A_{kn}^T P_{nn} P_{nn} A_{nk} Q_{kk},$$

care se mai poate scrie

$$\begin{aligned} \frac{Z_{kn} Z_{nk}^T}{P_{nn}} &= Z_{kn} P_{nn}^{-1} Z_{nk}^T = Q_{kk} Q_{kk} A_{kn}^T P_{nn} A_{nk} = \\ &= Q_{kk} Q_{kk} N_{kk} = Q_{kk} N_{kk}^{-1} N_{kk} = Q_{kk}. \end{aligned}$$

În acest fel, relația (9) se poate scrie

$$(10) \quad \frac{M_X^2}{m_0^2} = Z_{kn} P_{nn}^{-1} Z_{nk}^T = Q_{kk},$$

unde

$$(11) \quad P_{nn} = \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}.$$

Inversa ponderii unei funcții de n argumente aleatoare este dată de relația

$$(12) \quad \frac{1}{P_X} = \left[\frac{\partial(X)}{\partial(L)} \right] P_{nn}^{-1} \left[\frac{\partial(X)}{\partial(L)} \right]^T.$$

Calculînd derivatele și efectuînd înmulțirile, se obține pentru inversa ponderilor componentelor deplasării expresia

$$(13) \quad \frac{1}{P_X} = Z_{kn} P_{nn}^{-1} Z_n^T = Q_{kk}.$$

Conform relațiilor (10) și (13) se poate scrie

$$(14) \quad \frac{M_X^2}{m_0^2} = \frac{1}{P_X} = Q_{kk}.$$

În acest fel, evaluarea preciziei componentelor deplasării se face cu ajutorul matricei

$$(15) \quad M_X^2 = m_0^2 Q_{kk},$$

unde: m_0 — eroarea unității de pondere iar Q_{kk} — matricea coeficienților de pondere.

Erorile medii pătratice ale componentelor deplasării orizontale a punctului de control j ($j = 1, 2, \dots, N$), sînt date de relațiile

$$(16) \quad m_{\Delta X_j} = \pm m_0 \sqrt{Q_{X_j X_j}}, \quad m_{\Delta Y_j} = \pm m_0 \sqrt{Q_{Y_j Y_j}}.$$

Eroarea medie pătratică a vectorului deplasării orizontale este

$$(17) \quad m_{L_j} = \sqrt{m_{\Delta X_j}^2 + m_{\Delta Y_j}^2} = m_0 \sqrt{Q_{X_j X_j} + Q_{Y_j Y_j}}.$$

Deoarece erorile medii pătratice ale componentelor deplasării nu caracterizează mulțumitor precizia de determinare a vectorului deplasării orizontale a punctelor de control [3], pentru o apreciere mai completă a preciziei se calculează elementele elipselor erorilor medii pătratice, pe baza matricei (15), folosind formulele:

a) pentru semiaxele elipsei erorilor:

$$(18) \quad A_j = \pm m_0 \sqrt{\frac{1}{2} (Q_{X_j X_j} + Q_{Y_j Y_j} + q_j)},$$

$$(19) \quad B_j = \pm m_0 \sqrt{\frac{1}{2} (Q_{X_j X_j} + Q_{Y_j Y_j} - q_j)},$$

unde

$$q_j = \sqrt{(Q_{X_j X_j} - Q_{Y_j Y_j})^2 + 4 Q_{X_j Y_j}^2};$$

b) pentru orientările θ_j și $\theta_j + 100^\circ$ ale semiaxelor elipsei erorilor:

$$(20) \quad \operatorname{tg} 2\theta_j = \frac{2Q_{X_j Y_j}}{Q_{X_j X_j} - Q_{Y_j Y_j}}.$$

Uneori este importantă cunoașterea erorii medii pătratice a unei funcții de elementele compensate

$$(21) \quad \Phi = F_{1k}^T X_{k1},$$

unde: Φ — un număr, $F_{1k}^T = [f_1 f_2 \dots f_k]$ — matricea linie a derivatelor parțiale, X_{k1} — matricea coloană a elementelor compensate. Înlocuind în (21) vectorul elementelor compensate (vectorul deplasării) cu expresia (1), se obține

$$(22) \quad \Phi = F_{1k}^T Z_{kn} L_{n1}.$$

Se scrie formula inversei ponderii funcției

$$(23) \quad \frac{1}{P_\Phi} = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2} = \left| \frac{\partial(\Phi)}{\partial(L)} \right| P_{nn}^{-1} \left[\frac{\partial(\Phi)}{\partial(L)} \right]^T.$$

Prin calculul derivatelor funcției Φ în raport cu variabilele aleatoare L , ca funcție compusă, rezultă pentru inversa ponderii funcției formula

$$(24) \quad \frac{1}{P_\Phi} = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2} = F_{1k}^T Z_{kn} P_{nn}^{-1} Z_{nk}^T F_{k1} = F_{1k}^T Q_{kk} F_{k1}.$$

În acest fel, eroarea medie pătratică a unei funcții de mărimile compensate va fi exprimată de relația

$$(25) \quad m_\Phi^2 = m_0^2 F_{1k}^T Q_{kk} F_{k1}.$$

3. Concluzii. Prin posibilitatea oferită a calculării imediate atât a erorilor medii pătratice ale componentelor deplasării pe direcțiile axelor de coordonate $m_{\Delta X}$, $m_{\Delta Y}$ și a erorii medii pătratice a vectorului deplasării m_L , cât și a direcțiilor θ și $\theta + 100^\circ$ de-a lungul cărora erorile vectorului sînt maxime (A) și respectiv, minime, (B), matricea M_X^2 , exprimată de (15), permite alegerea unei soluții optime, din mai multe soluții posibile, la urmărirea comportării unei construcții.

Cu relația (25) se pot calcula erorile medii pătratice ale orientărilor vectorilor deplasării orizontale ale punctelor de control, de pe construcția observată.

Primită la 5 ianuarie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Laboratorul de topografie și
fotogrammetrie

și

Catedra de geometrie descriptivă și desen

BIBLIOGRAFIE

1. Botez M., *Teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate*. EDP, Buc., 1961.
2. Ghițău D., *Geodezie — Triangulație*. EDP, Buc., 1972.
3. Nistor Gh., *Optimizarea intersecției înainte*. Bul. Inst. polit. Iași, XX (XXIV), 3—4, s. V (1974).
4. Nistor Gh., Braier A., *Determinarea vectorului deplasării construcțiilor prin măsurări indirecte ponderate*. Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3—4, s. I (1977).

ESTIMATION DE LA PRÉCISION DU VECTEUR DÉPLACEMENT DES CONSTRUCTIONS OBTENU PAR DES MESURES INDIRECTES PONDÉRÉES

(Résumé)

On établit les formules à l'aide desquelles on peut apprécier la précision de la détermination du vecteur déplacement des constructions obtenu par des mesures indirectes pondérées

VARIATIONAL PRINCIPLE IN MAGNETOHYDRODYNAMICS

II. THE LAGRANGIAN APPROACH

BY

I. MERCHES, I. CIOBOTARIU and C. GRIGORESCU

1. Introduction. As we showed [1], the description of the electromagnetic field $\vec{E}$, $\vec{B}$ interacting with an inviscid, infinitely conducting fluid in terms of the generalized electromagnetic antipotentials $\vec{M}$, ψ , makes it possible to construct a suitable Lagrangian density, leading to the fundamental system of equations which describe our physical model. This was done by approaching the motion of the fluid from the Eulerian point of view.

It is the purpose of the present paper to give a variational principle for such a fluid, by using the Lagrangian approach of the motion.

2. Basic Equations. The equations describing an inviscid, infinitely conducting fluid, undergoing isentropic motion in an external electromagnetic field are: Maxwell's equations [2], [3]

$$(1) \quad \epsilon_{jms} \partial_m (\mu_0^{-1} B_s - \epsilon_{srq} P_r v_q) = \partial_t (\epsilon_0 E_j + P_j),$$

$$(2) \quad \epsilon_0 \partial_j E_j + \partial_j P_j = 0,$$

$$(3) \quad \epsilon_{jms} \partial_m E_s = -\partial_t B_j,$$

$$(4) \quad \partial_j B_j = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

Ohm's law for infinite conductivity

$$(5) \quad E_j + \epsilon_{jms} v_m B_s = 0;$$

the equation of continuity

$$(6) \quad \partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0;$$

the equation of conservation of entropy

$$(7) \quad \partial_t S + v_j \partial_j S = 0;$$

the equation of state and the equation of motion. In the above formulas, the index t stands for the partial derivative with respect to time, while the summation symbol is omitted. In view of (1), (2), the electromagnetic field can be expressed in terms of a special set of potentials $\vec{M}$, ψ

$$(8) \quad E_j = \varepsilon_0^{-1} (\varepsilon_{jms} \partial_m M_s - P_j),$$

$$(9) \quad B_j = \mu_0 (\partial_j \psi + \varepsilon_{jms} P_m v_s + \partial_t M_j),$$

which will be useful in the following.

3. The Lagrangian Approach. There are several papers dealing with the variational formulation of hydrodynamics (e.g. [4], [5]) and plasma dynamics (e.g. [6]) from the Lagrangian point of view. The basic idea of this method is to suppose that a fluid particle at the point x_j at time t was originally at the point x_j^0 at time $t = 0$, i.e. the equations of the particle trajectories are given by

$$(10) \quad x_j = x_j(x_j^0, t); \quad j, k = 1, 2, 3.$$

In this case, the equation of continuity becomes

$$(11) \quad \rho(x_j t) J = \rho(x_j^0),$$

where $J = \partial(x_j)/\partial(x_j^0)$ is the Jacobian of the transformation, while the equation (7) shall be written as

$$(12) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{x_j^0} = 0.$$

We can now construct the Lagrangian density and write Hamilton's principle. In view of (10)–(12) and [1], we get

$$(13) \quad \delta \int \left[\left(\frac{1}{2\mu_0} B_j B_j - \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_j E_j + \frac{1}{2} \rho v_j v_j - \rho \varepsilon \right) J - \right. \\ \left. - \alpha(\rho J - \rho_0) - \beta(\partial_t S)_{x_j^0} \right] dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 dt = 0,$$

where $\rho_0 = \rho(x_j^0)$; $\alpha(x_j^0, t)$, $\beta(x_j^0, t)$ are two Lagrangian multipliers. The dependent variables are then ρ , S , P_i , M_i , ψ , x_i , while the independent variables are x_j^0 and t . Making allowance for the thermodynamic fundamental equation of reversible processes

$$(14) \quad T dS = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

a variation in ρ and S give [4]:

$$(15) \quad \frac{1}{2} \rho v_j v_j - \rho \varepsilon - \alpha \rho - p = 0,$$

$$(16) \quad \partial_j \beta - \rho_0 T = 0.$$

Variations with respect to P_i , M_k , and ψ give

$$\delta_{P_i} \int () d\vec{x}^0 dt = \int (\varepsilon_{jlm} B_j v_m + E_i) \delta P_i d\vec{x}^0 dt = 0,$$

$$\delta_{M_k} \int () d\vec{x}^0 dt = \int \left[B_k \frac{\partial (\delta M_k)}{\partial t} - \varepsilon_{ijk} E_i \frac{\partial (\delta M_k)}{\partial x_j} \right] d\vec{x}^0 dt = 0,$$

$$\delta\psi \int () d\vec{x} dt = \int B_i \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x_i} d\vec{x} dt = 0,$$

i.e. the Ohm's law (5) and the second group of Maxwell's equations (3), (4). Observing that

$$\delta_x J = \frac{\partial(\delta x, y, z)}{\partial(x^0, y^0, z^0)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^0, y^0, z^0)} \frac{\partial(\delta x, y, x)}{\partial(x, y, z)} = J \frac{\partial(\delta x)}{\partial x},$$

$$\delta_x \rho = \frac{\partial}{\partial x} (\rho \delta x) - \rho \frac{\partial(\delta x)}{\partial x},$$

we may write

$$\begin{aligned} \delta_x \int () d\vec{x} dt = & \int \left\{ \left[\varepsilon_{ijk} B_i P_j \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial t} + \frac{1}{2} v_j v_j \delta \rho + \right. \right. \\ & + \rho v_k \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial t} - \varepsilon \delta \rho - \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \delta S \right) \left. \right] J - \alpha (\delta \rho J + \rho \delta J) - \\ & - \beta \left[\frac{\partial(\delta S)}{\partial t} \right]_{x_j^0} + \left(\frac{1}{2} \rho v_j v_j - \rho \varepsilon \right) J \frac{\partial(\delta x)}{\partial t} \left. \right\} d\vec{x} dt = 0, \end{aligned}$$

leading to the equation of motion in magnetohydrodynamics

$$(17) \quad \rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = - \partial_i p + \varepsilon_{irm} j_r B_m,$$

where the conduction current density is defined as [2]

$$(18) \quad j_r = \partial_t P_r + \varepsilon_{rms} P_m v_s + v_r \partial_s P_s.$$

4. Discussion. The usage of the generalized electromagnetic antipotentials allows us to construct the Lagrangian density of our system in a simple form, in which does not occur any interaction term. The variational formulation of magnetohydrodynamics of ideal fluids, approaching the motion from the Lagrangian point of view, proves once again the usefulness of these potentials. As a final remark, we note that the Lagrangian approach is not as much used as the Eulerian approach; the Eulerian description of continuous media is more popular than the Lagrangian one.

Received June 13, 1977

University „Al. I. Cuza”, Jassy,
Department of Theoretical Physics

REFERENCES

1. Merches I., *Variational Principle in Magnetohydrodynamics*. Phys. Fluids, **12**, 10, 2225 (1969).
2. Calkin M. G., Can. J. Phys., **41**, 2241 (1963).
3. Merches I., J. Plasma Phys., **15**, 49 (1976).

4. Herivel J. W., Proc. Cambridge Phil. Soc., 51, 344 (1955).
5. Eckart C., Phys. Fluids, 3, 3, 421 (1960).
6. Katz S., Phys. Fluids, 4, 3, 345 (1961).

UN PRINCIPIU VARIATIONAL ÎN MAGNETOHIDRODINAMICĂ

II. Formularea lagrangeană

(Rezumat)

Utilizând noțiunea de antipotențiale electrodinamice generalizate, se aplică punctul de vedere al lui Lagrange pentru stabilirea pe cale variațională a ecuațiilor fundamentale ale unui sistem în interacțiune, format dintr-un fluid ideal, infinit conductor, care execută o mișcare izentropă într-un câmp extern.

STABILITY OF THE SOLUTIONS IN LINEAR VISCOELASTICITY

BY

GH. GR. CIOBANU

0. Introduction. The aim of the paper is to give sufficient stability conditions for the solutions of linear dynamic viscoelasticity. We are dealing here with the stability of equilibrium solution and the stability of homogeneous mixed initial boundary value problem for prescribed body force. Our guidance is the papers [1], [2].

1. Preliminaries. Let us consider a linear viscoelastic solid defined by the constitutive equations

$$(1.1) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl}(\mathbf{x}, t) u_{k,l}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t G_{ijkl}(\mathbf{x}, t, \tau) u_{k,l}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

where $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ are the cartesian components of the stress tensor and $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$ is the displacement vector at the point $\mathbf{x}$ and instant t . All suffices range over the values 1, 2, 3 and the usual convention of summation over repeated indices is adopted. The *elasticities* $C_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$ and the *relaxation moduli* $G_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$ are satisfying the usual symmetries.

The solid occupies a bounded region B of the three-space in the time interval $I = [0, T]$, $0 < T < \infty$. Let ∂B be the boundary of B and $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ its unit normal. Suppose that ∂B is sufficiently smooth to justify using the divergence theorem. Assume the displacement vector is prescribed on $\partial \bar{B}_1$ and the traction on ∂B_2 , $\partial \bar{B}_1 \cap \partial B_2 = \emptyset$, $\partial B_1 \cap \partial B_2 = \partial B$.

The mixed initial boundary value problem of linear dynamic viscoelasticity can be reduced to the following mixed initial boundary value problem with homogeneous boundary data [1]: Find the solution of the system

$$(1.2) \quad \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t),$$

satisfying the homogeneous boundary conditions

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} && \text{on } \partial \bar{B}_1 \times [0, T], \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j &= 0 && \text{on } \partial B_2 \times [0, T], \end{aligned}$$

and the initial conditions

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

on the initial configuration of the body.

Let $C_0^\infty(\mathbf{B})$ be the set of three-dimensional vector functions with compact support in $\mathbf{B}$ and components in $C^\infty(\mathbf{B})$. Let $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_+$ be Hilbert spaces obtained by completion of $C_0^\infty(\mathbf{B})$ under the norms $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_+$ induced by the inner products $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_0} = \int_{\mathbf{B}} u_i v_i dv$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_+} = \int_{\mathbf{B}} u_{i,j} v_{i,j} dv$,

respectively, and let $\mathbf{H}_-$ be the completion of $C_0^\infty(\mathbf{B})$ via the norm $\|\mathbf{u}\|_- = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_+} \frac{|(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}_0}|}{\|\mathbf{v}\|_+}$.

Definition [1]. A generalized solution of the mixed initial boundary problem (1.2) — (1.4) on $[0, T]$ is a function $u(x, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_+)$ with $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_0)$, $\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_-)$ which satisfies the system (1.2) a.e. on $[0, T]$ and the conditions

$$(1.4): \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ in } [\mathbf{H}_+, \mathbf{H}_0]_{1/2} \text{ and } \rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \text{ in } [\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_-]_{1/2}.$$

If the conditions:

a) The elasticities $C_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$ and $C'_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$, their derivatives with respect to t , are Lebesgue measurable functions essentially bounded on $\mathbf{B}$ fix any fixed $t \in [0, T]$.

b) The relaxation moduli $G_{ijkl}(\mathbf{x}, t, \tau)$ and $\frac{\partial}{\partial \tau} G_{ijkl}(\mathbf{x}, t, \tau)$ are Lebesgue measurable functions essentially bounded on $\mathbf{B}$ for fixed $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, T]$.

c) There exists the constant $a > 0$ such that

$$(1.5) \quad \int_{\mathbf{B}} C_{ijkl}(\mathbf{x}, t) u_{i,j}(\mathbf{x}, t) u_{k,l}(\mathbf{x}, t) dv \geq a \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2$$

for every $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{H}_+$, uniformly with respect to $t \in [0, T]$.

d) There exists $\rho_0 > 0$ such that

$$(1.6) \quad \operatorname{ess\,inf}_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}} \rho(\mathbf{x}) \geq \rho_0.$$

e) The body force $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_0)$, and

f) $\mathbf{u}^{(x)} \in \mathbf{H}_+$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}_0$,

are satisfied, then the problem (1.2) — (1.4) has a generalized solution [1].

In the above conditions we shall extend some results of [2] concerning the stability of the elastic solution to the case of viscoelasticity.

2. Some Basic Formulas. Multiplying (1.2) by $u_i(x, t)$ integrating over $[0, t] \times \mathbf{B}$, applying the divergence theorem, and taking into account (1.3) it results

$$(2.1) \quad \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_B \dot{C}_{ijkl}(\mathbf{x}, t) u_{i,j}(\mathbf{x}, t) u_{k,l}(\mathbf{x}, t) dv - \\ - \int_0^t \left[\int_B G_{ijkl}(\mathbf{x}, t, \tau) u_{i,j}(\mathbf{x}, t) u_{k,l}(\mathbf{x}, \tau) dv \right] d\tau + P(t),$$

and therefore

$$(2.2) \quad E(t) - E(0) = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_B \dot{C}_{ijkl}(\mathbf{x}, \eta) u_{i,j}(\mathbf{x}, \eta) u_{k,l}(\mathbf{x}, \eta) dv d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^t \left[\int_B \sigma_{ij}^{(v)}(\mathbf{x}, \eta) \dot{u}_{i,j}(\mathbf{x}, \eta) dv \right] d\tau + \int_0^t P(\eta) d\eta \right].$$

In (2.1) and (2.2),

$$(2.3) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_B [C_{ijkl}(\mathbf{x}, t) u_{i,j}(\mathbf{x}, t) u_{k,l}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{x}, t)] dv$$

is the sum of kinetic energy and *elastic* deformation energy,

$$(2.4) \quad P(t) = \int_B \rho(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) dv$$

is the work done by body force, and

$$(2.5) \quad \sigma_{ij}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t G_{ijkl}(\mathbf{x}, t, \tau) u_{k,l}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

are the components of the *viscoelastic part* of stress tensor.

In deriving (2.1), (2.2) we assumed that there is sufficient smoothness to justify reversing the order of integration.

In addition to assumptions a) — e) of Sec. 1, we suppose that the time derivatives of the elasticities and the relaxation moduli satisfy

$$(2.6) \quad \int_B \dot{C}_{ijkl}(\mathbf{x}, t) u_{i,j}(\mathbf{x}, t) u_{k,l}(\mathbf{x}, t) dv > b \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2, \quad b > 0$$

for every $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{H}_+$, uniformly with respect to $t \in [0, T]$, and

$$(2.7) \quad \int_0^t \left[\int_B \sigma_{ij}^{(v)}(\mathbf{x}, \eta) u_{i,j}(\mathbf{x}, \eta) dv \right] d\tau \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

The condition (2.6) is essential and in the study of elastic stability for the case of time depending elasticities (condition (36.3) of [2]) and (2.6) requires that the total power of the *viscoelastic part* of the stress on the time interval $[0, t]$ is non-negative.

3. Stability of Equilibrium. The dynamic system under consideration is the set of all vector functions $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_+)$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_+)$, $\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, T]; \mathbf{H}_-)$ satisfying a.e. the system (1.2) with $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

In this case $P(t) = 0$ and by (2.2), (2.6), (2.7) we get

$$(3.1) \quad E(t) \leq E(0),$$

which shows that the equilibrium solution is uniformly Liapunov stable with respect to the measures $E(0)$ and $E(t)$.

Using the conditions c) and d) of Sect. 1 we have

$$(3.2) \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + a \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2 \leq 2E(t),$$

and thus from (3.1) we get

$$(3.3) \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2 \leq \frac{2}{m} E(0),$$

where $m = \min(\rho_0, a)$.

On the other hand, applying the Schwarz-Cauchy inequality to the integral

$$\int_B C_{ijkl}(\mathbf{x}, 0) u_{i,j}(\mathbf{x}, 0) u_{k,l}(\mathbf{x}, 0) dv$$

we have

$$\begin{aligned} 2E(0) &= \int_B [\rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{x}, 0) + C_{ijkl}(\mathbf{x}, 0) u_{i,j}(\mathbf{x}, 0) u_{k,l}(\mathbf{x}, 0)] dv \leq \\ &\leq \int_B [\rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{x}, 0) + C u_{i,j}(\mathbf{x}, 0) u_{i,j}(\mathbf{x}, 0)] dv \leq \\ (3.4) \quad &\leq M \int_B [\dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{x}, 0) + u_{i,j}(\mathbf{x}, 0) u_{i,j}(\mathbf{x}, 0)] dv = \\ &= M (\|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\|_+^2), \end{aligned}$$

where $M = \max \{ \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in B} \rho(\mathbf{x}), C \}$, $C = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in B} \sqrt{\text{tr } \mathbf{C}^2}$, and $\mathbf{C}$ is the $\sigma \times \sigma$ matrix of components

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}, 0) = C_{klij}(\mathbf{x}, 0) = C_{ijkl}(\mathbf{x}, 0).$$

Now, from (3.3) and (3.4)₄ we obtain the main inequality,

$$(3.5) \quad \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2 \leq \frac{M}{m} (\|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\|_+^2).$$

Thus in the conditions of Sects. 2 and 3 we established the

Theorem 1. *The equilibrium solution of dynamical viscoelasticity is uniformly Liapunov stable with respect to the measures*

$$(3.6) \quad \mu(\mathbf{u}) = \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2, \quad \mu_0(\mathbf{u}) = E(0)$$

or in respect to the measures

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \mu(\mathbf{u}) &= \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2, \\ \mu_0(\mathbf{u}) &= \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\|_+^2. \end{aligned}$$

Corollary. By using Poincaré's inequality

$$(3.8) \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_0 \leq c \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+, \quad c > 0$$

from (3.5) it follows

$$(3.9) \quad \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 \leq \frac{M}{m m_1} (\|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\|_+^2)$$

with $m_1 = \min \{1, c\}$. That is the equilibrium solution is stable with respect to the measures

$$(3.10) \quad \mu(\mathbf{u}) = \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_0^2, \quad \mu_0(\mathbf{u}) = E(0),$$

or in respect to the measures

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \mu(\mathbf{u}) &= \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_0^2, \\ \mu_0(\mathbf{u}) &= \|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)\|_0^2 + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\|_+^2. \end{aligned}$$

The above theorem and its corollary are valid and when the elasticities are time independent because in this case the first integral from the left hand side of (2.2) is vanishing.

If the elasticities are time independent, by using (2.2), (2.6) (2.7), (3.4)₄ and (3.8), we have

$$(3.12) \quad m (\|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_0^2 + a \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2) + \frac{b}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\|_+^2 d\tau \leq 2E(0).$$

From (3.12) it follows

$$(3.13) \quad ma \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_+^2 + \frac{b}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\|_+^2 d\tau \leq 2E(0).$$

Now, (3.13) implies the inequality

$$(3.14) \quad \int_0^t \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\|_+^2 d\tau \leq \frac{4}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{2ma}t}\right) E(0) \leq \frac{4}{b} E(0)$$

and by (3.8) we get

$$(3.15) \quad \int_0^t \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau \leq \frac{4c}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{2ma}t}\right) E(0) \leq \frac{4c}{b} E(0).$$

From (3.14), (3.15) it follows the

Theorem 2. *The equilibrium solution of linear dynamic viscoelasticity is uniformly Liapunov stable with respect to the measures,*

$$(3.16) \quad \mu(u) = \int_0^t \|u(x, \tau)\|_+^2 d\tau, \quad \mu_0(u) = E(0)$$

and

$$(3.17) \quad \mu(u) = \int_0^t \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau, \quad \mu_0(x) = E(0).$$

Corollary. *If the solution is defined on $[0, \infty)$ then we have*

$$(3.18) \quad \int_0^\infty \|u(x, \tau)\|_+^2 d\tau \leq \frac{4}{b} E(0),$$

$$\int_0^\infty \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau \leq \frac{4c}{b} E(0).$$

The inequalities (3.18) follow by taking $t \rightarrow \infty$ in (3.14) and (3.15).

4. Prescribed Body Force and Homogeneous Initial Data. In this case we assume $F(x, t) \neq 0$, $u_0(x) = \dot{u}_0(x) \equiv 0$. With these conditions we have $E(0) = 0$ and from (2.2) (2.6), (2.7) it follows

$$(4.1) \quad E(t) \leq \int_0^t \left(\int_B \rho(x) F_t(x, \eta) \dot{u}_t(x, \eta) dv \right) d\eta.$$

Therefore the estimates (73.6) and (73.10) in Sec. 73 of [2] hold for the solution of linear dynamic viscoelasticity.

Received December 17, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Dafermos C. M., *An Abstract Volterra Equation with Applications to linear Viscoelasticity*. J. Diff. Equations, 7, 554—569 (1970).
2. Knops R. J., Wilkes E. W., *Theory of Elastic Stability*. Handbuch der Physik, Band VI a/3, Springer Verlag, Berlin, 1973.

STABILITATEA SOLUȚIILOR ÎN VÎSCOELASTICITATEA LINIARĂ

(Rezumat)

Se stabilesc condiții suficiente de stabilitate a soluțiilor din viscoelasticitatea liniară. Rezultatele se referă la stabilitatea soluției de echilibru și la stabilitatea problemei cu condiții mixte la limită și inițiale omogene, pentru forțe masice impuse.

GREEN FORMULA FOR AN INFINITE DOMAIN WITH A CAVITY AND INTEGRAL REPRESENTATION OF A REGULAR SOLUTION IN MICROPOLAR THERMOELASTICITY

BY

I. CRĂCIUN

1. Introduction. In the past few years, various mathematical problems related to stationary vibrations in the linear theory of elasticity, thermoelasticity and micropolar elasticity of an homogeneous and isotropic or anisotropic solid have been considered by a number of authors (see e.g. [1], [3], [5], [6]).

The aim of the present paper is to prove the Green formula for an infinite domain with a cavity and an integral representation formula of the regular solution in the micropolar thermoelasticity of stationary vibrations of an isotropic, homogeneous and centrosymmetric solid. The analogous formulae for a bounded domain were proved in [7]. The integral representation formula allow us to introduce the surface micropolar thermoelastic potentials for an infinite domain with a cavity. For a bounded domain these potentials were introduced in [7]. In order to prove the announced formulae it is need of the radiation conditions of the regular solution of the differential equations of micropolar thermoeoasticity and of asymptotic estimates of the fundamental solutions. These are given in Sect. 4 and Sect. 3, respectively.

2. Basic Equations. The basic equations of stationary vibrations of an isotropic, homogeneous and centrosymmetric solid in the linear theory of micropolar thermoelasticity are [2], [7]

$$\begin{aligned} &[(\mu + \alpha) \Delta + \rho \omega^2] \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \varphi - \nu \operatorname{grad} \theta + \mathbf{X} = 0, \\ &[(\gamma + \varepsilon) \Delta + J \omega^2 - 4\alpha] \varphi - (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{Y} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\left(\Delta + \frac{i\omega}{\kappa} \right) \theta + i\omega \eta \operatorname{div} \mathbf{u} + Q = 0,$$

where $\mathbf{u}$, φ , θ are, respectively, the amplitudes of the displacement vector, rotation vector and increment of temperature; λ , μ , α , β , γ , ε are material constants; ν , κ , η are thermal constants; ρ , J , ω are, respectively, the material density, the rotational inertia and the frequency of vibrations, while $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, Q are the amplitudes of the body force vector, body couple force vector and heat source.

These equations can be written in a matricial form as

$$(2.2) \quad B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \omega\right)V(x) + Z(x) = 0,$$

where $B(\partial/\partial x, \omega)$ is the differential operator of micropolar thermoelasticity, $V = (\mathbf{u}, \varphi, \theta)^T = (U, \theta)^T$ and $Z = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, Q)^T$.

By $R(\partial/\partial x, n)V(x)$ we denoted the generalized stress vector on a surface element containing the point x , with normal $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ in x . We have [7], [8]

$$(2.3) \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)V(x) = \left(T\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)U(x) - \nu\theta(x)\mathbf{n}, M\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)\varphi(x), \frac{\partial\theta(x)}{\partial n}\right)^T,$$

where

$$(2.4) \quad \begin{aligned} TU &= 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mu - \alpha) \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \mathbf{n} \times \varphi, \\ M\varphi &= 2\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \beta \mathbf{n} \operatorname{div} \varphi + (\gamma - \epsilon) \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \varphi. \end{aligned}$$

We can say that $R(\partial/\partial x, n)$ is the operator of the boundary conditions of the operator $B(\partial/\partial x, \omega)$.

The adjoint system of (2.2) is

$$(2.5) \quad \tilde{B}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \omega\right)\tilde{V}(x) + \tilde{Z}(x) = 0,$$

where $\tilde{B}(\partial/\partial x, \omega)$ is the adjoint operator in Lagrange's sense of the operator $B(\partial/\partial x, \omega)$.

The operator of the boundary conditions of $\tilde{B}(\partial/\partial x, \omega)$ was denoted by $\tilde{R}(\partial/\partial x, n)$ and [7]

$$(2.6) \quad \tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)\tilde{V}(x) = \left(T\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)\tilde{U}(x) - i\omega\eta\tilde{\theta}(x)\mathbf{n}, M\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)\tilde{\varphi}(x), \frac{\partial\tilde{\theta}(x)}{\partial n}\right)^T.$$

3. Fundamental Solutions and their Asymptotic Estimates. Let $\tilde{\Gamma}(y, x; \omega, \nu)$ be the matrix of the fundamental solutions of the operator $\tilde{B}(\partial/\partial y, \omega)$. If we denote by $\tilde{\Gamma}^{(l)} = (y, x; \omega, \nu)$, $l = \overline{1, 7}$, the columns of this matrix, then $\tilde{\Gamma}^{(l)} = (\tilde{\mathbf{u}}^{(l)}, \tilde{\varphi}^{(l)}, \tilde{\theta}^{(l)})^T$, where [7]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[\sum_1^2 A_m \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y \frac{e^{ik_m r}}{r} \delta^{(k)} + \sum_3^4 A_n \operatorname{grad}_y \operatorname{div}_y \frac{e^{ik_n r}}{r} \delta^{(k)} \right], \\ \tilde{\varphi}^{(k)} &= \frac{p}{4\pi\rho c_2^2 (k_1^2 - k_2^2)} \operatorname{rot}_y \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 r}}{r} \right) \delta^{(k)}, \\ \tilde{\theta}^{(k)} &= \frac{\nu}{4\pi(\lambda + 2\mu)(k_3^2 - k_4^2)} \operatorname{div}_y \left(\frac{e^{ik_3 r}}{r} - \frac{e^{ik_4 r}}{r} \right) \delta^{(k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}^{(k+3)} &= \frac{s}{4\pi J c_4^2 (k_1^2 - k_2^2)} \operatorname{rot}_y \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 r}}{r} \right) \delta^{(k)}, \\
 (3.2) \quad \tilde{\varphi}^{(k+3)} &= \frac{1}{4\pi J c_4^2} \left[\sum_1^2 B_m \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y \frac{e^{ik_m r}}{r} \delta^{(k)} + B_3 \operatorname{grad}_y \operatorname{div}_y \frac{e^{\hat{\sigma}_3 r}}{r} \delta^{(k)} \right], \\
 \tilde{\theta}^{(k+3)} &= 0, \\
 \tilde{\mathbf{u}}^{(7)} &= -\frac{i\omega\gamma}{4\pi(\lambda+2\mu)(k_3^2 - k_4^2)} \operatorname{grad}_y \left(\frac{e^{ik_3 r}}{r} - \frac{e^{ik_4 r}}{r} \right), \\
 (3.3) \quad \tilde{\varphi}^{(7)} &= 0, \\
 \tilde{\theta}^{(7)} &= -\frac{1}{4\pi} \left(A_4 \frac{e^{ik_3 r}}{r} + A_3 \frac{e^{ik_4 r}}{r} \right), \quad k=(1, 2, 3), \quad \delta^{(k)} = (\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \delta_3^{(k)}),
 \end{aligned}$$

$\delta_i^{(k)}$ being the Kronecker delta and $r = |y - x| = \sqrt{\sum_1^3 (y_i - x_i)^2}$.

In these equations we used the notations [5], [7]

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^2 &= \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}, \quad \sigma_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu+\alpha}, \quad \sigma_3^2 = \frac{\omega^2}{c_3^2} = \frac{J\omega^2}{\beta+2\gamma}, \quad \sigma_4^2 = \frac{\omega^2}{c_4^2} = \frac{J\omega^2}{\gamma+\varepsilon}, \\
 \hat{\sigma}_3^2 &= \sigma_3^2 - \frac{4\alpha}{\beta+2\gamma}, \quad \hat{\sigma}_4^2 = \sigma_4^2 - 2p, \quad p = \frac{2\alpha}{\gamma+\varepsilon}, \quad s = \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}, \\
 k_1^2 + k_2^2 &= \sigma_2^2 + \hat{\sigma}_4^2 + ps, \quad k_1^2 k_2^2 = \sigma_2^2 \hat{\sigma}_4^2, \\
 (3.4) \quad k_3^2 + k_4^2 &= \sigma_1^2 + \frac{i\omega}{\alpha} + \frac{i\omega\gamma\nu}{\nu+2\mu}, \quad k_3^2 k_4^2 = \sigma_1^2 \frac{i\omega}{\alpha}, \\
 A_1 &= \frac{\sigma_2^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}, \quad A_2 = \frac{\sigma_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}, \quad A_3 = -\frac{\sigma_1^2 - k_4^2}{k_3^2 - k_4^2}, \quad A_4 = -\frac{\sigma_1^2 - k_3^2}{k_4^2 - k_3^2}, \\
 B_1 &= \frac{A_2}{k_1^2}, \quad B_2 = \frac{A_1}{k_2^2}, \quad B_3 = -\frac{\sigma_2^2}{k_1^2 k_2^2}.
 \end{aligned}$$

We shall suppose that $J\omega^2 > 4\alpha$. Nowacki [3] has shown that in this case, which has a physical meaning, the roots k_1, k_2 have real positive values, while $k_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = (3, 4)$, $\beta_n > 0$.

Let us observe that

$$(3.5) \quad \tilde{\Gamma}^{(k)} = \sum_1^4 \tilde{\Gamma}^{(k)}, \quad \tilde{\Gamma}^{(k+3)} = \sum_1^2 \tilde{\Gamma}^{(k+3)} + \tilde{\Gamma}^{(k+3)}, \quad \tilde{\Gamma}^{(7)} = \sum_3^4 \tilde{\Gamma}^{(7)},$$

where

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}^{(k)} &= (\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}, \tilde{\varphi}^{(k)}, 0)^T, \quad \tilde{\Gamma}^{(k)} = (\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}, 0, \tilde{\theta}^{(k)})^T, \quad \tilde{\Gamma}^{(k+3)} = (\tilde{\mathbf{u}}^{(k+3)}, \tilde{\varphi}^{(k+3)}, 0)^T, \\
 (3.6) \quad \tilde{\Gamma}^{(k+3)} &= (0, \tilde{\varphi}^{(k+3)}, 0)^T, \quad \tilde{\Gamma}^{(7)} = (\tilde{\mathbf{u}}^{(7)}, 0, \tilde{\theta}^{(7)})^T, \\
 m &= (1, 2), \quad n = (3, 4), \quad k = (1, 2, 3),
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} &= \frac{A_m}{4\pi\rho\omega^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{e^{ik_m r}}{r} \delta^{(k)}, & \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} &= \frac{A_n}{4\pi\rho\omega^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{e^{ik_n r}}{r} \delta^{(k)}, \\
 \tilde{\varphi}^{(k)} &= \frac{(-1)^{m-1} p}{4\pi\rho c_2^2 (k_1^2 - k_2^2)} \operatorname{rot} \frac{e^{ik_m r}}{r} \delta^{(k)}, & \tilde{\theta}^{(k)} &= \frac{(-1)^{n-1} \nu}{4\pi(\lambda + 2\mu)(k_3^2 - k_4^2)} \operatorname{div} \frac{e^{ik_n r}}{r} \delta^{(k)}, \\
 (3.7) \quad \tilde{\mathbf{u}}^{(k+3)} &= \frac{(-1)^{m-1} s}{4\pi(\lambda + 2\mu)(k_1^2 - k_2^2)} \operatorname{rot} \frac{e^{ik_m r}}{r} \delta^{(k)}, & \tilde{\mathbf{u}}^{(7)} &= \frac{(-1)^n i\omega\eta}{4\pi(\lambda + 2\mu)(k_3^2 - k_4^2)} \operatorname{grad} \frac{e^{ik_n r}}{r}, \\
 \tilde{\varphi}^{(k+3)} &= \frac{B_m}{4\pi J c_4^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{e^{ik_m r}}{r} \delta^{(k)}, & \tilde{\theta}^{(7)} &= -\frac{A_{n+1}}{4\pi r} e^{ik_n r}, \quad A_5 = A_3, \\
 \tilde{\varphi}^{(k+3)} &= \frac{B_3}{4\pi J c_4^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{e^{ik_n r}}{r} \delta^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Taking into account that the function $G(y, x) = e^{ikr}/r$ satisfies, for $y \neq x$, the equation $(\Delta_y + k^2)G = 0$, we conclude, from (3.6), (3.7), that

$$(3.8) \quad (\Delta + k_m^2) \tilde{\Gamma}^{(s)} = 0, \quad (\Delta + k_n^2) \tilde{\Gamma}^{(q)} = 0, \quad (\Delta + \hat{\sigma}_3^2) \tilde{\varphi}^{(k+3)} = 0.$$

We have also

$$(3.9) \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{\varphi}^{(k+3)} = 0.$$

Here and in what follows the indices m, n, s, q, k, l take the following values: $m = (1, 2)$, $n = (3, 4)$, $s = (1, 2, \dots, 6)$, $q = (1, 2, 3, 7)$, $k = (1, 2, 3)$, $l = (1, 2, \dots, 7)$.

It is easy to verify that $\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}$, $\tilde{\varphi}^{(s)}$ and $\tilde{\mathbf{u}}^{(q)}$, $\tilde{\theta}^{(q)}$ also satisfy the following differential equations:

$$(3.10) \quad (k_m^2 - \hat{\sigma}_4^2) \tilde{\varphi}^{(s)} - p \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} = 0, \quad (k_n^2 - \sigma_1^2) \tilde{\mathbf{u}}^{(q)} + \frac{i\omega\eta}{\lambda + 2\mu} \operatorname{grad} \tilde{\theta}^{(q)} = 0.$$

From the form of the fundamental solutions we see that they satisfy, in a neighbourhood of $r = \infty$, the following conditions:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}^{(s)} &= \left(\mathbf{0} \left(\frac{1}{r} \right), \mathbf{0} \left(\frac{1}{r} \right), 0 \right)^T, \quad \tilde{\varphi}^{(k+3)} = \mathbf{0} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \tilde{\Gamma}^{(q)} = e^{-\beta_n r} \left(\mathbf{0} \left(\frac{1}{r} \right), 0, \mathbf{0} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^T, \\
 (3.11) \quad (D - ik_m) \tilde{\Gamma}^{(s)} &= \left(O \left(\frac{1}{r^2} \right), O \left(\frac{1}{r^2} \right), 0 \right)^T, \quad (D - i\hat{\sigma}_3) \tilde{\varphi}^{(k+3)} = \mathbf{0} \left(\frac{1}{r^2} \right), \\
 (D - ik_n) \tilde{\Gamma}^{(q)} &= e^{-\beta_n r} \left(\mathbf{0} \left(\frac{1}{r^2} \right), 0, O \left(\frac{1}{r^2} \right) \right)^T,
 \end{aligned}$$

where $D = d/dr$ and the symbol $\mathbf{f}(r) = \mathbf{O}(1/r^p)$ means that $\lim_{r \rightarrow \infty} r^p \mathbf{f}(r) = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ being a nonzero constant vector.

Let us assume now that an infinite micropolar thermoelastic body $D^- = E \setminus (D^+ \cup S)$, E be the whole space, possesses a cavity D^+ bounded by a regular surface S with the unit normal vector from D^+ to D^- . Let $x \in D^-$ be a fixed point and S_r be the spherical surface of sufficiently large radius r about x , containing the region D^+ . The unit normal vector on S_r in a point $y(y_1, y_2, y_3)$ is

$$\mathbf{n}_y = \left(\frac{y_1 - x_1}{r}, \frac{y_2 - x_2}{r}, \frac{y_3 - x_3}{r} \right).$$

Taking into account Eqs. (3.7) – (3.10), the asymptotic estimates (3.11) and a result from ([5], p. 311), we find that the singular solutions also satisfy the following estimates:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_y \times \operatorname{rot}_y \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} &= -ik_m \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \mathbf{n}_y \times \operatorname{rot}_y \tilde{\varphi}^{(s)} &= -ik_m \tilde{\varphi}^{(s)} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \mathbf{n}_y \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{(q)} &= ik_n \tilde{\mathbf{u}}^{(q)} + e^{-\beta nr} \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ (3.12) \quad \omega \gamma \tilde{\theta}^{(2)} \mathbf{n}_y &= \frac{(\lambda + 2\mu)(k_n^2 - \sigma_1^2)}{k_n} \tilde{\mathbf{u}}^{(q)} + e^{-\beta nr} \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \mathbf{n}_y \times \tilde{\varphi}^{(s)} &= -i \frac{k_m^2 - \sigma_2^2}{sk_m} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \mathbf{n}_y \operatorname{div} \tilde{\varphi}^{(k+3)} &= i \hat{\sigma}_3 \tilde{\varphi}^{(k+3)} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \mathbf{n}_y \times \tilde{\varphi}^{(k+3)} &= \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Besides satisfying (3.11), (3.12), the singular solutions also meet the asymptotic conditions

$$\begin{aligned} \tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \gamma_y\right) \tilde{\Gamma}^{(s)}(y, x; \omega, \nu) &= \left(i \frac{\rho \omega^2}{k_m} \tilde{\mathbf{u}}^{(s)}, ik_m (\gamma + \varepsilon) \tilde{\varphi}^{(s)}, \mathbf{0} \right)^T + \left(\mathbf{0}, \frac{1}{r^2}, \mathbf{0} \right)^T, \\ (3.13) \quad \tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \gamma_y\right) \tilde{\Gamma}^{(k+3)}(y, x; \omega, \nu) &= \left(\mathbf{0}, i \hat{\sigma}_3 (\beta + 2\gamma) \tilde{\varphi}^{(k+3)}, \mathbf{0} \right)^T + \left(\mathbf{0}, \frac{1}{r^2}, \mathbf{0} \right)^T, \\ \tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \gamma_y\right) \tilde{\Gamma}^{(q)}(y, x; \omega, \nu) &= \left(i \frac{\rho \omega^2}{k_n} \tilde{\mathbf{u}}^{(q)}, \mathbf{0}, ik_n \tilde{\theta}^{(q)} \right)^T + e^{-\beta nr} \left(\mathbf{0}, \frac{1}{r^2}, \mathbf{0}, \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right)^T. \end{aligned}$$

The proof of these estimates can be easily given if we use (2.6), (2.4), (3.6), (3.7), (3.9), (3.12) and the properties of the numbers from (3.4).

4. Radiation Conditions in Micropolar Thermoelasticity. In a previous paper [8] we have proved that any regular solution of the equation

$$(4.1) \quad B\left(\frac{\partial}{\partial y}, \omega\right) V(y) = 0,$$

can be represented in the form

$$(4.2) \quad V(y) = \sum_1^5 \tilde{V}(y),$$

where $\tilde{V} = (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, 0)^T$, $\tilde{V} = (\tilde{u}, 0, \tilde{\theta})^T$, $\tilde{V} = (0, \tilde{\varphi}, 0)^T$, the functions $\tilde{u}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ satisfying the following equations:

$$(4.3) \quad (\Delta + k_p^2) \tilde{V} = 0, \quad (\Delta + \hat{\sigma}_3^2) \tilde{\varphi} = 0, \quad p = (1, 2, 3, 4),$$

$$(4.4) \quad \operatorname{div} \tilde{\varphi} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{\varphi} = 0,$$

$$(4.5) \quad (k_m^2 - \sigma_2^2) \tilde{u} - s \operatorname{rot} \tilde{\varphi} = 0, \quad (k_n^2 - \sigma_1^2) \tilde{u} + \frac{\nu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{grad} \tilde{\theta} = 0.$$

The same result is also true for a regular solution of the homogeneous adjoint equations

$$(4.6) \quad \tilde{B}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \omega\right) \tilde{V}(y) = 0,$$

with the remark that ν from (4.5) is changed into $i\omega\gamma$.

Guided by the works [4] – [6], [8] we give the following

Definition 4.1. The regular solution $V(y)$ in D^- of (4.1) is said to satisfy the radiation conditions if

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \tilde{V} &= \left(o\left(\frac{1}{r}\right), o\left(\frac{1}{r}\right), 0 \right)^T, \quad \tilde{V} = e^{-\beta_n r} \left(o\left(\frac{1}{r}\right), 0, o\left(\frac{1}{r}\right) \right)^T, \quad \tilde{\varphi} = o\left(\frac{1}{r}\right), \\ (D - ik_m) \tilde{V} &= \left(o\left(\frac{1}{r}\right), o\left(\frac{1}{r}\right), 0 \right)^T, \quad (D - ik_n) \tilde{V} = e^{-\beta_n r} \left(o\left(\frac{1}{r}\right), 0, o\left(\frac{1}{r}\right) \right)^T, \\ (D - i\hat{\sigma}_3) \tilde{\varphi} &= o\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned}$$

where $r = |y - x|$, $D = d/dr$, x being an arbitrary fixed point in D^- and the symbol $f(r) = o(1/r^p)$ means that $\lim_{r \rightarrow \infty} r^p f(r) = 0$.

The same definition of the radiation conditions may be given for the regular solution of (4.6).

We can prove the following theorems:

Theorem 4.1. Any regular solution of (4.1), satisfying the radiation conditions, also satisfies the estimates

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_y \times \operatorname{rot} \mathbf{u} &= -ik_m^m \mathbf{u} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathbf{n}_y \times \operatorname{rot} \varphi = -ik_m^m \varphi + o\left(\frac{1}{r}\right), \\
 \mathbf{n}_y \times \varphi &= -i \frac{k_m^2 - \sigma_1^2}{sk_m} \mathbf{u} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathbf{n}_y \times \varphi = o\left(\frac{1}{r}\right), \\
 \mathbf{n}_y \operatorname{div} \mathbf{u} &= ik_n^n \mathbf{u} + e^{-\beta_n r} o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathbf{n}_y \operatorname{div} \varphi = i \hat{\sigma}_3^3 \varphi + o\left(\frac{1}{r}\right), \\
 \sqrt{\theta} \mathbf{n} &= \frac{i(\lambda + 2\mu)(k_n^2 - \sigma_1^2)}{k_n} \mathbf{u} + e^{-\beta_n r} o\left(\frac{1}{r}\right),
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

where $y \in S_r$ and $\mathbf{n}_y = \left(\frac{y_1 - x_1}{r}, \frac{y_2 - x_2}{r}, \frac{y_3 - x_3}{r} \right)$.

Theorem 4.2. *The generalized stress vector $R(\partial/\partial y, \mathbf{n}_y) V(y)$ satisfies on S_r the following estimates:*

$$\begin{aligned}
 R\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) \bar{V}(y) &= \left(i \frac{\rho \omega^2}{k_m} \mathbf{u}, ik_m (\gamma + \varepsilon) \varphi, 0 \right)^T + \left(o\left(\frac{1}{r}\right), o\left(\frac{1}{r}\right), 0 \right)^T, \\
 R\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) \bar{V}(y) &= \left(i \frac{\rho \omega^2}{k_n} \mathbf{u}, 0, ik_n \theta \right)^T + e^{-\beta_n r} \left(o\left(\frac{1}{r}\right), 0, o\left(\frac{1}{r}\right) \right)^T, \\
 R\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) \bar{V}(y) &= (0, i \hat{\sigma}_3 (\beta + 2\gamma) \varphi, 0)^T + \left(0, o\left(\frac{1}{r}\right), 0 \right)^T.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

The same asymptotic estimates also hold for $\bar{R}(\partial/\partial y, \mathbf{n}_y) \bar{V}(y)$.

5. Green Formula for D^- and Integral Representation. Let us apply the Green formula (4.8) from [7] to the domain $D^- \cap C_r$, where $C_r = \{y \mid y \in E, |y - x| < r\}$, x being an arbitrary fixed point from D^- . We obtain

$$\begin{aligned}
 \int_{D^- \cap C_r} \left[V(y) \bar{B}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \omega\right) \bar{V}(y) - \bar{V}(y) B\left(\frac{\partial}{\partial y}, \omega\right) V(y) \right] dy = \\
 = \int_{\bar{S}_r} \left[V(y) \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) \bar{V}(y) - \bar{V}(y) R\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) V(y) \right] d\sigma_y - \\
 - \int_S \left[V(y) \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) \bar{V}(y) - \bar{V}(y) R\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) V(y) \right] dS_y.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Taking into account the results of Sect. 4 we can prove that

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{S}_r} \left[V(y) \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) \bar{V}(y) - \bar{V}(y) R\left(\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{n}_y\right) V(y) \right] d\sigma_y = 0.
 \tag{5.2}$$

By passing to limit for $r \rightarrow \infty$ in (5.1), on account of (5.2), we get

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & \int_{D^-} \left[V(y) \tilde{B} \left(\frac{\partial}{\partial y}, \omega \right) \tilde{V}(y) - \tilde{V}(y) B \left(\frac{\partial}{\partial y}, \omega \right) V(y) \right] dy = \\
 & = - \int_S \left[V(y) \tilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) \tilde{V}(y) - \tilde{V}(y) R \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) V(y) \right] dS_y,
 \end{aligned}$$

which is the Green formula for the infinite domain D^- in the linear theory of micropolar thermoelasticity.

Let us put now in (5.3) $\tilde{V}(y) = \tilde{\Gamma}^{(1)}(y, x; \omega, \nu)$ and $V(y)$ be a regular solution of (4.1). Using the asymptotic estimates given in Sect. 3 and a property of $\tilde{\Gamma}^{(1)}$ (see Theorem 3.2 [7]), we get

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad V_i(x) &= \int_S V(y) \tilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) \tilde{\Gamma}^{(1)}(y, x; \omega, \nu) dS_y - \\
 &- \int_S \tilde{\Gamma}^{(1)}(y, x; \omega, \nu) R \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) V(y) dS_y.
 \end{aligned}$$

As in [7], this formula can be written in the vectorial form

$$(5.5) \quad V(x) = \int_S \Lambda(x, y; \omega, \nu, n) V(y) dS_y - \int_S \Gamma(x, y; \omega, \nu) R \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) V(y) dS_y,$$

where $\Lambda(x, y; \omega, n, \nu) = ((\tilde{R}(\partial/\partial y, n) \tilde{\Gamma}(y, x; \omega, \nu))^T, \Gamma$ being the matrix of the fundamental solutions of the operator $B(\partial/\partial x, \omega)$.

In the case of micropolar elasticity, this formula was proved by O.I. Napetvaridze in [6].

The integral representation formula (5.5) gives a reason for the introduction of some micropolar thermoelastic potentials for $x \in D^-$. The properties of these potentials may be found in [7].

Received November 8, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелеишвили М. О., Бурчуладзе Т. В., *Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости*. Изд. „Наука“, Москва, 1976.
2. Nowacki W., *Couple Stresses in the Theory of Thermoelasticity* (III). Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Sci. Techn., 14, 8 (1966).
3. Nowacki W., *Theory of Micropolar Elasticity*. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine; Springer-Verlag, Wien—New York.
4. Vekua I. N., *New Methods for Solving Elliptic Equations*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
5. Ignaczak J., *Radiation Conditions in Asymmetric Elasticity*. Jour. of Elasticity, 2, 1 (December 1972).
6. Напетваридзе О. И., *О граничных задачах моментной теории упругости*. Аннотации докл. семин. Инст. прикл. матем. тбилисск. гос. ун-та, 5* (1971).

7. Crăciun I., *Potential Method in Micropolar Thermoelasticity*. Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. Appl., **22**, 1 (1977).
8. Crăciun I., *Radiation Conditions and Uniqueness Theorems in Micropolar Thermoelasticity*. Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. Appl., **23**, 1 (1978).

**FORMULA GREEN PENTRU UN DOMENIU INFINIT CU O CAVITATE ȘI
REPREZENTARE INTEGRALĂ A UNEI SOLUȚII REGULATE ÎN
TERMOELASTICITATEA MICROPOLARĂ**

(Rezumat)

Se demonstrează formula lui Green în termoelasticitatea micropolară a vibrațiilor staționare ale unui solid izotrop, omogen și centrosimetric care ocupă un domeniu infinit cu o cavitate. De aici se deduce o formulă de reprezentare integrală a soluției regulate a termoelasticității micropolare. Ambele formule se demonstrează în baza unor condiții de radiație introduse în §§ 4 și 3.

WAVE PROPAGATION IN ANISOTROPIC MICROPOLAR BODIES

BY

I. NISTOR

0. Introduction. This paper is concerned with the propagation of acceleration and shock waves in an anisotropic, homogeneous linearly micropolar elastic medium. The propagation of acceleration waves in non-linear Cosserat bodies will be discussed in an other paper [1].

It is shown that the speed of propagation and amplitude vector of the waves are real. Explicit solution of the growth equation is given.

1. Basic Equations and Formulae. We consider a homogeneous, anisotropic, micropolar elastic solid. We refer the motion of the body to a fixed system of rectangular cartesian axes. The basic equations in the linear theory of micropolar elasticity are ([2], pp. 33, 45):

$$(1.1) \quad t_{jt,j} + X_t = \rho \ddot{u}_t, \quad m_{jt,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + Y_t = \rho \ddot{\varphi}_t,$$

$$(1.2) \quad t_{ij} = A_{ijkl} e_{kp} + B_{ijkl} \kappa_{kp}, \quad m_{ij} = B_{kpij} e_{kp} + C_{ijkl} \kappa_{kp},$$

$$(1.3) \quad e_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{jik} \varphi_k, \quad \kappa_{kp} = \varphi_{k,p}.$$

We have the conditions of symmetry of tensors A_{ijkl} and C_{ijkl}

$$(1.4) \quad A_{ijkl} = A_{kpij}, \quad C_{ijkl} = C_{kpij}.$$

Let us consider a moving surface $\Sigma(t)$. We adopt a system of coordinates u^α , ($\alpha = 1, 2$) on the surface and denote by $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ the first and second fundamental forms of the surface $\Sigma(t)$.

We note the following formulas needed in our study [3]

$$(1.5) \quad n_{i,\alpha} = -b_{\alpha}^{\beta} x_{i,\beta}, \quad G_{,\alpha} = -V_{\beta} b_{\alpha}^{\beta},$$

$$(1.6) \quad \frac{d \ln b}{dt} = G b_{,\alpha}^{\alpha} - V_{,\alpha}^{\alpha}, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\delta F}{\delta t} + V^{\alpha} F_{,\alpha}.$$

Here b is the determinant of b_{α}^{β} , G is the speed of propagation of the surface $\Sigma(t)$, F is an arbitrary function, $\delta(.)/\delta t$ is the displacement derivative with respect to the surface $\Sigma(t)$, V_{α} is the tangential component of V_t , given by $V_{\alpha} = V_t x_{t,\alpha}$.

We assume that the wave is propagating into a uniform medium. Thus we get

$$(1.7) \quad \frac{\delta G}{\delta t} = -V^\alpha G_{,\alpha}.$$

2. Propagation Condition and the Equation of the Shock Wave Amplitude. A propagation surface is said to be a shock wave if the functions u_i , φ_i are continuous everywhere, while their first and higher derivatives have jump discontinuities across the waves but are continuous functions everywhere else.

The conditions of compatibility for shock waves are ([4], Sect. 189)

$$(2.1) \quad [u_{i,k}] = s_i n_k, \quad [\varphi_{i,k}] = \tilde{s}_i n_k, \quad [\dot{u}_i] = -G s_i, \quad [\dot{\varphi}_i] = -G \tilde{s}_i,$$

$$(2.2) \quad [u_{i,jk}] = b_i n_j n_k + g^{\alpha\beta} s_{i,\alpha} (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) - s_i x_{k,\beta} x_{j,\alpha} b^{\alpha\beta},$$

$$[\varphi_{i,jk}] = \tilde{b}_i n_j n_k + g^{\alpha\beta} \tilde{s}_{i,\alpha} (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) - \tilde{s}_i x_{k,\beta} x_{j,\alpha} b^{\alpha\beta},$$

$$[\ddot{u}_i] = b_i G^2 - 2G \frac{\delta s_i}{\delta t} - \frac{\delta G}{\delta t} s_i, \quad [\ddot{\varphi}_i] = \tilde{b}_i G^2 - 2G \frac{\delta \tilde{s}_i}{\delta t} - \tilde{s}_i \frac{\delta G}{\delta t},$$

where

$$s_i = [u_{i,j} n_j], \quad \tilde{s}_i = [\varphi_{i,j} n_j], \quad b_i = [u_{i,jk} n_j n_k], \quad \tilde{b}_i = [\varphi_{i,jk} n_j n_k].$$

The vector $S = (S_k)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) defined by

$$S_i = s_i, \quad S_{i+3} = \tilde{s}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

we called the amplitude vector of the shock wave.

The momentum balance law and moment of momentum balance law lead to the following jump conditions across the wave front [5]:

$$(2.3) \quad [t_{ij}] n_i = -\rho G [\dot{u}_j], \quad [m_{ij}] n_j = -\rho G I [\dot{\varphi}_i].$$

Taking into account the relations (1.2), (1.3) and (2.1) the jump conditions (2.3) can be written as

$$(2.4) \quad A_{jk} s_k + B_{jk} \tilde{s}_k = \rho G^2 s_j,$$

$$B_{kj} s_k + C_{jk} \tilde{s}_k = \rho G^2 \tilde{s}_j,$$

where

$$A_{jk} = A_{ijpk} n_i n_p, \quad B_{jk} = B_{ijpk} n_i n_p, \quad C_{jk} = C_{ijpk} n_i n_p.$$

We note that the tensors A_{jk} and C_{jk} are symmetric in (j, k) in view of the relation (1.4).

If we define the matrix $\|Q_{ij}\|_{6 \times 6}$ and $\|P_{ij}\|_{6 \times 6}$ by the relations

$$Q_{ij} = A_{ij}, \quad Q_{i,j+3} = B_{ij}, \quad Q_{i+3;j} = B_{ji}, \quad Q_{i+3;j+3} = C_{ij},$$

$$P_{ij} = \delta_{ij}, \quad P_{i+3;j} = P_{i;j+3} = 0, \quad P_{i+3;j+3} = I \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

we may write (2.4) as

$$(2.5) \quad (Q_{ij} - \rho G^2 P_{ij}) S_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6).$$

For $\Sigma(t)$ to be a singular surface, the vector (S_k) cannot vanish identically. So we obtain

$$(2.6) \quad \det(Q_{ij} - \rho G^2 P_{ij}) = 0.$$

This in the equation giving the velocities of propagation.

Since Q_{ij} is symmetric and P_{ij} is symmetric and positive definite all the roots of the equation (2.6) are real ([4], p. 829).

From (2.4) we have

$$(2.7) \quad \rho G^2 (s_j s_j + I \tilde{s}_j \tilde{s}_j) = A_{jk} s_j s_k + 2B_{(jk)} \tilde{s}_j s_k + C_{jk} \tilde{s}_j \tilde{s}_k.$$

The right-hand membre represents the change in the strain energy of the medium, across the wave front. It is positive in view of the fact that the internal energy function is a positive definite quadratic function. Further this shows that the square of the velocity is positive; the velocities are all thus real.

Equations (1.1) must hold on either side of $\Sigma(t)$ and the jump of (1.1), after use of (1.2) and (2.2) gives

$$(2.8) \quad \begin{aligned} A_{ip} b_p + B_{ip} \tilde{b}_p - \rho G^2 b_i &= -2\rho G \frac{\delta s_i}{\delta t} - \rho s_i \frac{\delta G}{\delta t} - \\ &- (A_{jikp} s_{p,\alpha} + B_{jikp} \tilde{s}_{p,\alpha}) (n_j x_{k,\alpha} + n_k x_{j,\beta}) g^{\alpha\beta} + \\ &+ (A_{jikp} s_p + B_{jikp} \tilde{s}_p) x_{j,\alpha} x_{k,\beta} b^{\alpha\beta} + \frac{1}{G} A_{jikp} \varepsilon_{pqk} n_j \tilde{s}_q, \\ B_{pi} b_p + C_{ip} \tilde{b}_p - \rho G^2 \tilde{b}_i &= -2\rho IG \frac{\delta \tilde{s}_i}{\delta t} - \rho I \tilde{s}_i \frac{\delta G}{\delta t} - \\ &- (B_{kpji} s_{p,\alpha} + C_{jikp} \tilde{s}_{p,\alpha}) (n_k x_{j,\beta} + n_j x_{k,\beta}) g^{\alpha\beta} + \\ &+ B_{kpji} s_p + C_{jikp} \tilde{s}_p) x_{k,\alpha} x_{j,\beta} b^{\alpha\beta} - B_{kpji} \varepsilon_{pkq} n_j \tilde{s}_q - \\ &- B_{jkpq} \varepsilon_{ijk} n_p \tilde{s}_q - A_{jkpq} \varepsilon_{ijk} n_p s_q. \end{aligned}$$

In deriving (2.8), we have tacitly assumed that X_i and Y_i are continuous functions everywhere.

We now multiply (2.8) by the vector $(s_i, \tilde{s}_i)$ and recalling that it is a solution of the system (2.4), we arrive to

$$(2.9) \quad \begin{aligned} 2\rho G \left(s_i \frac{\delta s_i}{\delta t} + I \tilde{s}_i \frac{\delta \tilde{s}_i}{\delta t} \right) + \rho \frac{\delta G}{\delta t} (s_i^2 + I \tilde{s}_i^2) &+ (A_{jikp} s_i s_{p,\alpha} + \\ &+ B_{jikp} s_i \tilde{s}_{p,\alpha} + B_{kpji} \tilde{s}_i s_{p,\alpha} + C_{jikp} \tilde{s}_i \tilde{s}_{p,\alpha}) (n_j x_{k,\beta} + \\ &+ n_k x_{j,\beta}) g^{\alpha\beta} - (A_{jikp} s_i s_p + B_{jikp} s_i \tilde{s}_p + B_{kpji} \tilde{s}_i s_p + \\ &+ C_{jikp} \tilde{s}_i \tilde{s}_p) x_{k,\alpha} x_{j,\beta} b^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

We assume that the equation (2.6) has no multiple roots and consider the solution of (2.4) of the form

$$(2.10) \quad s_i = \psi f_i, \quad \tilde{s}_i = \psi \tilde{f}_i,$$

where the vector $(f_i, \tilde{f}_i)$ satisfies the condition

$$(2.11) \quad f_i^2 + \tilde{f}_i^2 = 1.$$

From (2.11) it follows

$$(2.12) \quad f_i f_{i,\alpha} + \tilde{f}_i \tilde{f}_{i,\alpha} = 0, \quad f_i \frac{\delta f_i}{\delta t} + \tilde{f}_i \frac{\delta \tilde{f}_i}{\delta t} = 0.$$

Substituting now the relation (2.10) into (2.9) and making use of the relations (1.6), (1.7) and (2.12) yields

$$(2.13) \quad 2\rho G \frac{d\psi}{dt} - [2\rho G V^\alpha - F_{jk} (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) g^{\alpha\beta}] \psi_{,\alpha} + [\rho V^\alpha G_{,\alpha} + F_{jk} x_{j,\alpha} x_{k,\beta} b^{\alpha\beta} - E_{jk\alpha} (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) g^{\alpha\beta}] \psi_{,\alpha},$$

where

$$(2.14) \quad \begin{aligned} F_{jk} &= A_{jikp} f_i f_p + B_{jikp} f_i \tilde{f}_p + B_{kpij} \tilde{f}_i f_p + C_{jikp} \tilde{f}_i \tilde{f}_p, \\ E_{jk\alpha} &= A_{jikp} f_j f_{p,\alpha} + B_{jikp} f_i \tilde{f}_{p,\alpha} + B_{kpij} f_i f_{p,\alpha} + C_{jikp} \tilde{f}_i \tilde{f}_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Using (2.11) and (2.12), one shows, as in [3] that the equation (2.13) becomes

$$(2.15) \quad \frac{2}{\psi} \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} \ln b.$$

The general solution of the equation (2.15) is

$$(2.16) \quad \psi^2 b^{-1} = \text{const.}$$

3. Acceleration Waves. A surface $\Sigma(t)$ is called an acceleration wave if the functions u_i , φ_i and their first derivatives are continuous while their second order derivatives suffer jump discontinuities across $\Sigma(t)$ but are continuous everywhere else.

The iterated kinematical and geometrical conditions of compatibility are ([4], p. 523)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [\dot{u}_{i,j}] &= -\frac{1}{G} a_i n_j, & [\dot{\varphi}_{i,j}] &= -\frac{1}{G} \tilde{a}_i n_j, \\ [u_{i,jk}] &= \frac{1}{G^2} a_i n_j n_k, & [\varphi_{i,jk}] &= \frac{1}{G^2} \tilde{a}_i n_j n_k, \end{aligned}$$

where

$$a_i = [\ddot{u}_i], \quad \tilde{a}_i = [\ddot{\varphi}_i].$$

From (2.2) and (3.1)₁ one obtain

$$[u_{i,jk}] = c_i n_j n_k - g^{\alpha\beta} \left(\frac{a_i}{G} \right)_{,\alpha} (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) + \frac{a_i}{G} x_{j,\alpha} x_{k,\beta} b^{\alpha\beta},$$

$$\begin{aligned}
 [\dot{\varphi}_i, jk] &= \tilde{c}_i n_j n_k - g^{\alpha\beta} \left(\frac{\tilde{a}_i}{G} \right)_{,\alpha} (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) + \frac{\tilde{a}_i}{G} x_{j,\alpha} x_{k,\beta} b^{\alpha\beta}, \\
 (3.2) \quad [\ddot{u}_i] &= c_i G^2 + 2 \frac{\delta a_i}{\delta t} - \frac{a_i}{G} \frac{\delta G}{\delta t}, \\
 [\ddot{\varphi}_i] &= \tilde{c}_i G^2 + 2 \frac{\delta \tilde{a}_i}{\delta t} - \frac{\tilde{a}_i}{G} \frac{\delta G}{\delta t},
 \end{aligned}$$

where

$$c_i = [u_{i,jk}] n_j n_k, \quad \tilde{c}_i = [\varphi_{i,jk}] n_j n_k.$$

The equations of motion (1.1) must hold on each side of the surface $\Sigma(t)$. Subtracting the limit values of these equations as the surface is approached from the one side or the other, and assuming that the body force and body couple are continuous across the wave, we obtain

$$(3.3) \quad A_{ip} a_p + B_{ip} \tilde{a}_p = \rho G^2 a_i, \quad B_{pi} a_p + C_{ip} \tilde{a}_p = \rho I G^2 \tilde{a}_i,$$

where A_{ip} , B_i , C_{ip} are given by (2.4).

As in § 2 one proves that the speed of propagation of the acceleration waves are all real.

Eqs. (1.1) differentiated with respect to time become

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & A_{jtkp} (\dot{u}_{p,kj} + \varepsilon_{pkq} \dot{\varphi}_{q,j}) + B_{jtkp} \dot{\varphi}_{p,kj} + \dot{X}_i = \rho \ddot{u}_i, \\
 & B_{ktpj} (\dot{u}_{p,kj} + \varepsilon_{pkq} \dot{\varphi}_{q,j}) + C_{jtkp} \dot{\varphi}_{p,kj} + \\
 & + \varepsilon_{ijk} [A_{jtkp} (\dot{u}_{q,p} + \varepsilon_{qpr} \dot{\varphi}_r) + B_{jtkp} \dot{\varphi}_{q,p}] + \dot{Y}_i = \rho I \ddot{\varphi}_i.
 \end{aligned}$$

Eq. (3.4) must hold identically in the regions on either side of the singular surface. The difference of the limit of (3.4), taken on the two sides of $\Sigma(f)$, is to be formed. With use of the identities (3.1), and (3.2) and assuming that $\dot{X}_i$, $\dot{Y}_i$ are continuous across the wave, we have

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & A_{ip} c_p + B_{ip} \tilde{c}_p - \rho G^2 c_i = 2\rho \frac{\delta a_i}{\delta t} - \frac{\rho a_i}{G} \frac{\delta G}{\delta t} + \left[A_{jtkp} \left(\frac{a_p}{G} \right)_{,\alpha} + \right. \\
 & + B_{jtkp} \left(\frac{a_p}{G} \right)_{,\alpha} \left. \right] (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) g^{\alpha\beta} + \frac{1}{G} A_{jtkp} \varepsilon_{pkq} n_j \tilde{a}_q - \\
 & - \frac{1}{G} (A_{jtkp} a_p + B_{jtkp} \tilde{a}_p) x_{j,\alpha} x_{k,\beta} b^{\alpha\beta}, \\
 & B_{pi} c_p + C_{ip} \tilde{c}_p - \rho G^2 I \tilde{c}_i = 2\rho I \frac{\delta \tilde{a}_i}{\delta t} - \frac{\rho I \tilde{a}_i}{G} \frac{\delta G}{\delta t} + \\
 & + \left[B_{ktpj} \left(\frac{a_p}{G} \right)_{,\alpha} + C_{jtkp} \left(\frac{\tilde{a}_p}{G} \right)_{,\alpha} \right] (n_j x_{k,\beta} + n_k x_{j,\beta}) g^{\alpha\beta} -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{G}(B_{kpjt}a_p + C_{jikp}\tilde{a}_p)x_{j,\alpha}x_{k,\beta}b^{\alpha\beta} + \frac{1}{G}A_{jikp}\varepsilon_{ijk}n_p a_q + \\ + \frac{1}{G}[B_{kpjt}\varepsilon_{pkq}n_j\tilde{a}_q + B_{jkpq}\varepsilon_{ijk}n_p\tilde{a}_q].$$

We multiply (3.5) by the vector $(a_i, \tilde{a}_i)$ and making use of the fact that it is a solution of the system (3.3), we obtain

$$(3.6) \quad 2\rho\left(a_i\frac{\delta a_i}{\delta t} + I\tilde{a}_i\frac{\delta \tilde{a}_i}{\delta t}\right) - \frac{\rho}{G}(a_i^2 + I\tilde{a}_i^2)\frac{\delta G}{\delta t} + \left[A_{jikp}a_i\left(\frac{a_p}{G}\right)_{,\alpha} + \right. \\ \left. + B_{jikp}a_i\left(\frac{\tilde{a}_p}{G}\right)_{,\alpha} + B_{kpjt}\tilde{a}_i\left(\frac{a_p}{G}\right)_{,\alpha} + C_{jikp}\tilde{a}_i\left(\frac{\tilde{a}_p}{G}\right)_{,\alpha}\right](n_jx_{k,\beta} + \\ + n_kx_{j,\beta})g^{\alpha\beta} - \frac{b^{\alpha\beta}}{G}(A_{jikp}a_ia_p + B_{jikp}a_i\tilde{a}_p + B_{kpjt}\tilde{a}_ia_p + C_{jikp}\tilde{a}_p\tilde{a}_i)x_{j,\alpha}x_{k,\beta}.$$

We take the solution of the system (3.3) (under the assumption that Eq. (2.6) has no multiply roots) of the form

$$a_i = ae_i, \quad \tilde{a}_i = a\tilde{e}_i,$$

where

$$e_i^2 + \tilde{e}_i^2 = 1.$$

After some straightforward calculation as in [3] we obtain an equation of the form (2.15). This shows that the amplitudes of acceleration waves vary in accordance with decay laws established above for shock wave.

Received December 5, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Nistor I., *Acceleration Wave in Hyperelastic Cosserat Bodies* (in preparation).
2. Nowacki W., *Theory of Micropolar Elasticity*. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, Udine 1970; Springer Verlag, Wien—New-York, 1970.
3. Nariboli G. A., *Wave Propagation in Anisotropic Elasticity*. J. Math. Anal. Applic., **16**, 108—122 (1966).
4. Truesdell C., Toupin R., *The Classical Field Theories*. „Flügge's Handbuch der Physik“, III/1, Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
5. McCarthy M., Eringen F., Eringen A. C., *Micropolar Viscoelastic Waves*. Int. J. Engng. Sci., **7**, 447 (1969).

PROPAGAREA UNDELOR ÎN MEDII MICROPOLARE ANIZOTROPE

(Rezumat)

Se studiază propagarea undelor de șoc și a undelor de accelerație în medii micropolare, anizotrope și omogene. Este considerat cazul teoriei liniare, deoarece propagarea undelor în medii Cosserat neliniare este prezentată în alt articol [1].

Se arată că ecuația caracteristică are toate rădăcinile reale și pozitive, adică toate vitezele de propagare a undelor sint reale. Se demonstrează că amplitudinea undelor de accelerație variază după aceeași lege ca și amplitudinea undelor de șoc.

Este dată soluția explicită a ecuației diferențiale pe care o verifică amplitudinea undelor.

ASUPRA UNOR CARACTERISTICI ELECTRICE ȘI GALVANOMAGNETICE LA STRATURI SUBȚIRI DE TELUR

DE

EMIL LUCA, MARCEL MOISE și SOFIA MELINTE

1. Introducere. Fenomenele de transport la suprafață sînt bine cunoscute a avea o puternică influență asupra proprietăților electronice ale semiconductoarelor. Aceste fenomene joacă un rol important în proprietățile de transport ale peliculelor semiconductoare. Acest rol rezultă din faptul că în timpul transportului prin pelicule, purtătorii de sarcină sînt supuși la împrăstieri considerabile la suprafețele marginale, în adaos la împrăștierea în proba plină. Împrăștierea suplimentară reduce mobilitatea efectivă a purtătorilor la valori mai joase decît la proba plină.

În ultimii ani, studii asupra proprietăților semiconductoare ale elementelor și compușilor au căpătat o nouă semnificație din cauza aplicațiilor lor în multe dispozitive electronice. Dacă pentru semiconductoare masive s-au făcut studii aprofundate și se găsește multă literatură [1] ... [3], nu același lucru se poate spune și în legătură cu straturile subțiri semiconductoare.

Studii experimentale asupra straturilor subțiri de telur au fost făcute de o serie de cercetări, dintre care cităm [4] ... [7]. Rezultatele obținute indică variații destul de spectaculoase ale acelorasi mărimi, datorită condițiilor diferite de depunere a peliculelor și a metodelor de măsură utilizate.

În lucrarea de față ne-am propus depunerea unor pelicule de telur pe suporturi de sticlă și măsurarea variației conductivității electrice, a coeficientului Hall și a mobilității Hall în funcție de temperatură. De asemenea am cercetat variația tensiunii Hall cu inducția magnetică, atît la temperatura mediului ambiant cît și la temperaturi mai ridicate.

2. Procedeu experimental. Straturile de telur au fost obținute prin depunerea în vid (presiunea din incinta de vaporizare fiind cuprinsă între $1,2 \cdot 10^6$ — $2,6 \cdot 10^{-6}$ mm Hg) a telurului pe substrat de sticlă. Suportul a fost degresat chimic, imersat în apă distilată și uscat în etuvă pentru a evita adsorbția apei și a acizilor grași.

După depunerea peliculei de telur s-au depus electrozii de argint, pentru asigurarea unui bun contact electric în timpul măsurărilor [8].

Pentru obținerea unor pelicule de grosime uniformă depunerea s-a făcut după direcția normală la suport prin rotirea unei colivii cu viteză

constantă. În dorința de a evita variația în condițiile experimentale, probe de diverse grosimi au fost obținute din același set de depuneri.

Grosimile b ale peliculelor au fost estimate din diferența de masă înainte și după depunerea straturilor de telur precum și din cunoașterea suprafețelor straturilor depuse. De asemenea s-a presupus că peliculele sînt uniforme iar densitatea lor aceeași cu a materialului plin.

Forma peliculelor depuse a fost dreptunghiulară cu dimensiunile de 6×22 mm. Amplasarea electrozilor s-a făcut ca în fig. 1.

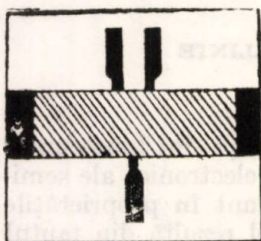


Fig. 1

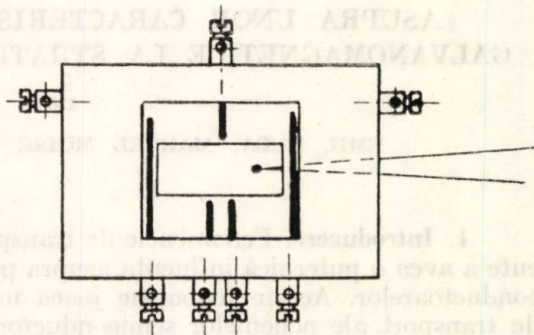


Fig. 2

Deoarece în mod practic este aproape imposibil ca electrozii Hall — care ar trebui să fie în număr de doi — să fie pe aceeași linie echipotențială, în lipsa cîmpului magnetic, la închiderea curentului de alimentare apare o tensiune parazită, care este destul de mare; de aceea s-a adoptat sistemul cu trei electrozi Hall și cu un montaj potențimetric [7], [9] cu care se elimină această tensiune.

Pentru eliminarea altor efecte parazite cum ar fi efectele Ettingshausen și Nernst, s-a lucrat cu un curent de alimentare slab și pe de altă parte s-a inversat atît inducția magnetică cît și curentul de alimentare.

Prinderea probelor pentru măsurarea caracteristicilor electrice și galvanomagnetice este destul de complicată, deoarece se pun concomitent mai multe probleme printre care: asigurarea unor contacte electrice, evitarea zgîrierii peliculei și împiedicarea spargerii suportului de sticlă (a cărui grosime este de 0,15 mm). După mai multe încercări preliminare, s-a reușit să se construiască un dispozitiv de prindere, din textolit, în care au fost montate sonde din fir de argint care fac contact cu electrozii de alimentare și cu electrozii Hall. În același dispozitiv s-a montat un microîncălzitor electric, pentru încălzirea probelor, precum și un termocuplu din cupru-constantan (fig. 2).

Pentru măsurarea tensiunii Hall s-a adoptat un montaj standard [9], iar ca aparat de măsură s-a utilizat un electrometru TR-1501. Măsurarea rezistenței probelor a fost făcută în punte.

Pentru producerea cîmpului magnetic s-a utilizat un electromagnet tip Weiss la care, pentru o distanță de 19 mm între piesele polare cilindrice, s-a obținut un cîmp de 0,920 T.

Încălzirea probelor pentru măsurarea caracteristicilor electrice și galvanomagnetice s-a făcut cu ajutorul microîncălzitorului cu o viteză de $1^\circ/\text{minut}$. În timpul măsurătorilor temperatura probelor a fost menținută constantă cu o variație de $\pm 0,5^\circ\text{C}$.

3. Rezultate. Măsurarea conductivității probelor s-a făcut în domeniul de temperatură cuprins între 23°C și 160°C . Din același set au fost alese probe de diferite grosimi pentru a putea compara rezultatele obținute, astfel încât probele să nu fie afectate de modul de depunere.

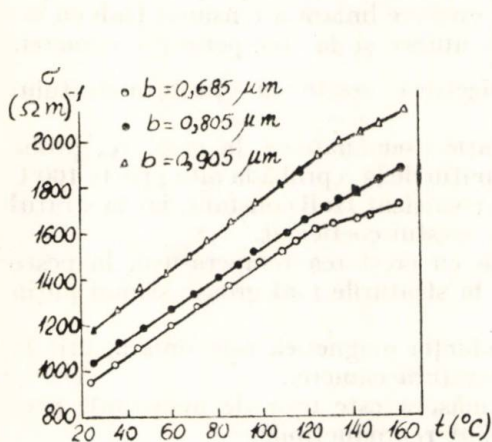


Fig. 3

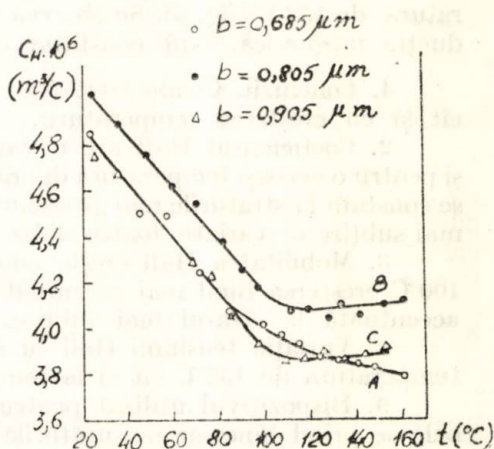


Fig. 4

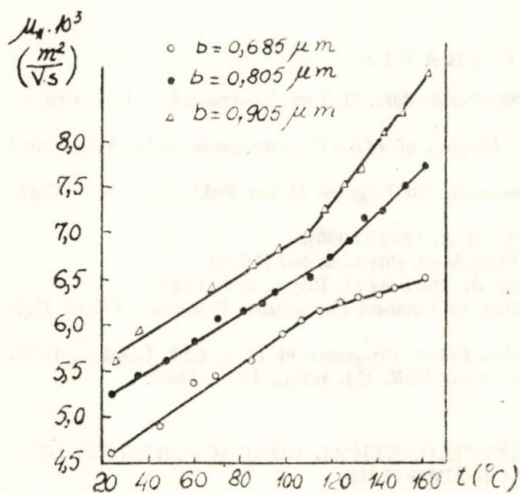


Fig. 5

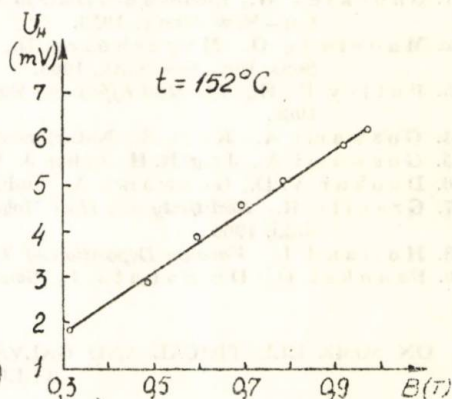


Fig. 6

Din fig. 3 se remarcă faptul că odată cu creșterea grosimii peliculei, adică creșterea vitezei de depunere, crește și valoarea conductivității electrice și se intensifică variația conductivității cu temperatura.

Din măsurătorile efectuate s-a calculat variația coeficientului Hall cu temperatura (fig. 4). Cu creșterea temperaturii are loc întâi o scădere bruscă a acestui coeficient iar apoi fie o scădere lină (curba *A*), fie o stabilizare la o valoare constantă (curbele *B* și *C*).

Avînd trasate curbele de variație ale conductivității și coeficientului Hall cu temperatura, s-au putut construi curbele de variație ale mobilității Hall cu temperatura (fig. 5).

Pentru a urmări variația tensiunii Hall în funcție de inducția magnetică la o anumită temperatură, s-a trasat această curbă pentru temperatura de 152°C (fig. 6). Se observă o creștere liniară a tensiunii Hall cu inducția magnetică, fapt constatat de autori și la temperatura camerei.

4. Concluzii. Conductivitatea electrică crește cu grosimea stratului cît și cu creșterea temperaturii.

2. Coeficientul Hall are o variație asemănătoare la cele trei probe și pentru o aceeași temperatură diferă puțin de la o probă la alta ; peste 100°C se constată la straturile mai groase un coeficient Hall constant, iar la stratul mai subțire o variație foarte slabă a acestui coeficient.

3. Mobilitatea Hall crește odată cu creșterea temperaturii, la peste 100°C creșterea fiind mai accentuată la straturile mai groase și mai puțin accentuată la stratul mai subțire.

4. Variația tensiunii Hall cu inducția magnetică este liniară, atît la temperatura de 152°C cît și la temperatura camerei.

5. Dispozitivul utilizat pentru măsură este ușor de manevrat, probele se prind bine iar măsurătorile sînt reproductibile.

Primită la 12 martie 1977

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Shockley W., *Electrons and Holes in Semiconductors*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton—New Jersey, 1953.
2. Madelung O., Meyerhofer D., *Physics of III—V compounds*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.
3. Putley E. H., *The Hall Effect and Semiconductor Physics*. Dover Publ., Inc., New York, 1968.
4. Goswami A., Koli S., *Naturforsch.*, 21 A, 1462 (1966).
5. Goswami A., Jog R. H., *Indian J. Pure Appl. Phys.*, 2, 407 (1964).
6. Deokar V. D., Goswami A., *Indian J. Pure Appl. Phys.*, 288 (1966).
7. Graeffe R., *Resistivity and Hall Mobility in Vacuum Evaporated Tellurium Films*. Helsinki, 1966.
8. Holland L., *Vacuum Deposition of Thin Films*. Chapman et Hall, Ltd, London, 1956.
9. Fränkel D., De Sabata I., *Generatorul Hall*. Ed. tehn., Buc., 1968.

ON SOME ELECTRICAL AND GALVANOMAGNETICAL CHARACTERISTICS OF TELLURIUM FILMS

(Summary)

The temperature dependence of the electrical conductivity, Hall coefficient and Hall mobility for the tellurium films of certain thicknesses was studied. Also the Hall voltage as a function of the magnetic field at 152°C and room temperature was searched.

To fix the sample a special support was made which permitted both the sample to be easily handled and a good reproductibility of the measurements.

DISPOSITIF POUR JETS DE GAZ DANS L'ANALYSE SPECTROGRAPHIQUE D'ÉMISSION

PAR

GH. TACU

1. Introduction. Pour l'analyse spectrographique des traces de certains éléments des roches et des minéraux, on utilise d'habitude la décharge à arc ou à étincelle en employant des électrodes de charbon.

Dans ce cas, les problèmes importants qui se posent sont d'éviter l'action de certains phénomènes perturbateurs sur les lignes spectrales et de trouver les plus adéquates conditions pour obtenir des lignes spectrales sans superpositions, plus intense s'il est possible et une meilleure reproduction de la décharge.

Nous mentionnons quelques causes qui influencent les mesures spectrales : l'action du fond du spectre, l'apparition des bandes moléculaires, en spécial de CN et C₂, la formation des composés réfractaires dans la présence de l'oxygène de l'air, qui mène à la diminution du nombre d'atomes libres capables d'émission, les processus de volatilisation sélective et la diffusion des éléments dans le plasma.

Ces causes sont atténuées et dans certaines conditions, quelques unes d'entre elles même écartés, si la décharge se produit dans un jet de gaz.

Ainsi, la décharge dans des jets de gaz (CO₂, argon, hélium, azote, air, etc) est de plus en plus employée pour l'analyse des traces de certains éléments.

Dans ce travail on présente un nouveau type de dispositif pour jets de gaz, employé dans l'analyse spectrographique d'émission. En même temps on étudie l'action des différents jets de gaz, produits par ce dispositif sur les bandes moléculaires de cyanogène et de charbon.

2. Description du dispositif. Ce dispositif a été réalisé pour obtenir certains jets de gaz avec débits relativement petits, dans lesquels se produit la décharge.

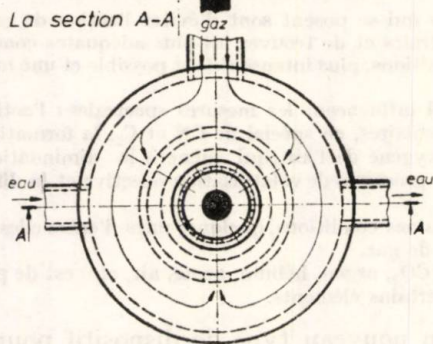
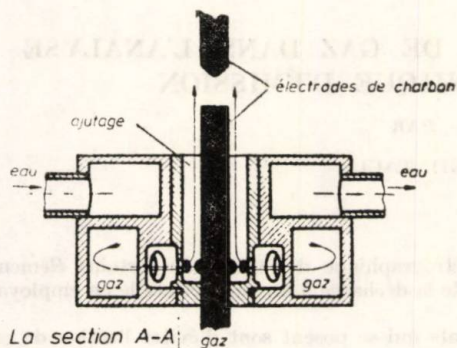
Il est formé d'un système de chambres de passage du gaz (fig. 1), d'une chambre de refroidissement par laquelle circule l'eau, et un ajoutage dans lequel se forme le jet de gaz, autour des électrodes de charbon. L'électrode peut glisser facilement par la partie inférieure de l'ajoutage (fig. 2).

Dans ce dispositif le gaz pénètre latéralement par une conduite dans une chambre cylindrique. De cette chambre, il pénètre par trois orifices dans un espace (toroïdal) d'uniformisation du gaz, ensuite par le système d'orifices de l'ajoutage on forme un jet cylindrique de gaz autour des électrodes.

Les dimensions des parties composantes ont été calculées de telle façon que pour des débits jusqu'à 4-5 l/min on puisse obtenir un régime

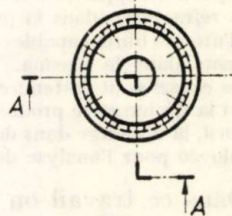
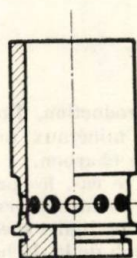
laminaire d'écoulement du gaz. Pour des débits plus grands, le jet de gaz assure aussi une bonne isolation de la décharge dans le milieu ambiant.

Le dispositif a été confectionné en acier inoxydable. L'ajoutage où la douse l'on a infilé au dispositif a été réalisé en deux variantes : a) quand on utilise des sources de basse tension (120—220 V), il est confectionné en acier avec un système de garnitures isolatrices d'„éternit” fixées à la partie inférieure, par laquelle passe l'électrode de charbon ; b) quand on utilise des sources de haute tension, l'ajoutage est confectionné en teflon.



Dispositif pour jets de gaz

Fig. 1



Ajutage

Fig. 2

Le système de refroidissement à l'eau permet le maintien d'un régime thermique adéquat de l'entier dispositif.

Aux cours des recherches effectuées on a monté deux dispositifs pour des jets de gaz, ayant la possibilité d'obtenir trois types de jets de gaz : a) jet de gaz simple de bas en haut (de l'électrode inférieure jusqu'à celui supérieur) ; b) jet simple de haut en bas ; c) jet double de gaz, par l'action simultanée des deux dispositifs.

Les deux dispositifs ont été connectés à un appareil de thermostatisation et mesure du débit de gaz.

3. L'appareillage spectrographique utilisé. Le type de dispositif pour jets de gaz a été expérimenté à un spectrographe FD-S ROW-Rathenow, D.D.R., avec le champ spectral entre 3 850 Å et 6 000 Å, ayant une dispersion variant entre 3,5 Å/mm pour une longueur d'onde de 3 870 Å et 20,4 Å/mm pour 5 700 Å.

Comme source spectrale on a utilisé l'arc de courant continu entre des électrodes de charbon, à la tension de 120 V.

On a employé des électrodes de charbon de type S.U. de 5 mm de diamètre.

Les spectres ont été enregistrés sur des plaques spectrales ORWO-WP-1.

Le courant de décharge s'est maintenu à la valeur de 8 A tant dans l'air statique que dans les jets de CO_2 , azote, air, et de 10 A pour air statique et argon.

L'analyse qualitative des bandes moléculaires du cyanogène et de C_2 a été effectuée avec un spectroprojecteur SP-2; pour la photométrie des bouts de la bande on a utilisé un microphotomètre M.F. Karl Zeiss Jena.

4. Résultats des expériences. En fonction de la nature du gaz et du type du jet, on a obtenu des atténuations des bandes de CN et C_2 et une intensification des bandes de C_2 en jet de CO_2 .

Les mesures effectuées sur les noircissements des bouts de bandes CN—4216 Å et C_2 —5 165 Å autant dans l'air que dans des jets de CO_2 , argon et azote, donnant des valeurs différentes, nous avons introduit le degré d'atténuation ou d'intensification, qui représente le rapport entre le noircissement du bout de bande en jet de gaz et le noircissement du bout de bande à air, c'est-à-dire

$$(1) \quad G = \frac{S_{\text{jet gaz}}}{S_{\text{air}}}.$$

4.1. L'influence du jet de CO_2 . La dépendence du degré d'atténuation G_A pour CN—4216 Å en fonction de la valeur du débit de CO_2 , est donnée dans la fig. 3 pour les trois types d'envoi du jet: de bas en haut ($\uparrow$), de haut en bas ($\downarrow$) et simultanément dans les deux sens ($\uparrow \downarrow$).

On constate qu'en jets simples de CO_2 (fig. 3, les courbes 1 et 2), on obtient une atténuation maximale des bandes du cyanogène à un débit de 4—5 l/min. Dans ce cas, le degré d'atténuation du bout de bande CN—4 216 Å est plus petit que 0,1. Dans un jet double de CO_2 (fig. 3, courbe 3) on constate une atténuation continuelle des bandes de cyanogène à l'augmentation du débit de gaz.

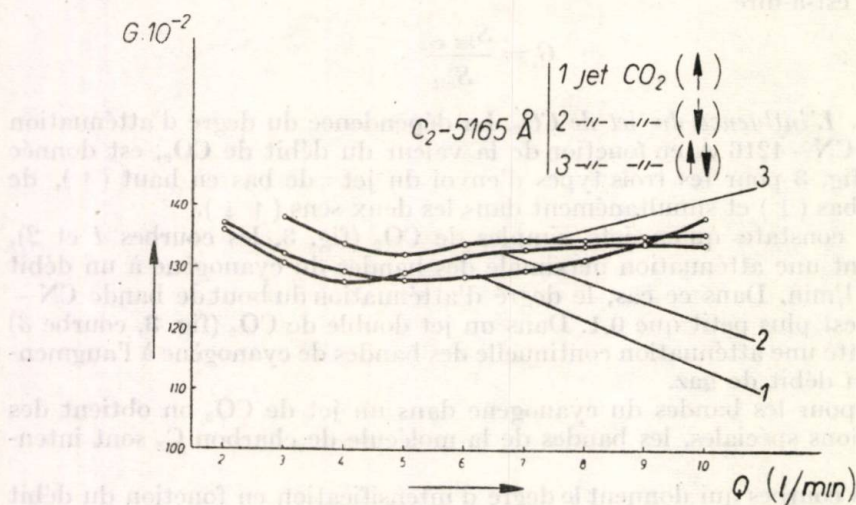
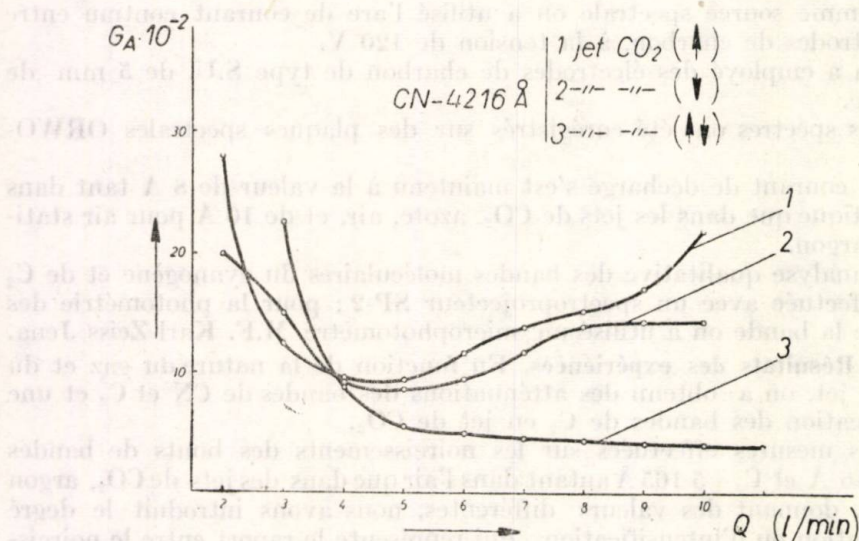
Si pour les bandes du cyanogène dans un jet de CO_2 on obtient des atténuations spéciales, les bandes de la molécule de charbon C_2 sont intensifiées.

Les courbes qui donnent le degré d'intensification en fonction du débit du jet de CO_2 sont représentées dans la fig. 4.

Le degré d'intensification ne présente pas une variation nette avec la valeur du débit de gaz, pourtant on observe un minimum pour le débit d'environ 5 l/min, dans le cas d'un jet double de CO_2 .

Le degré d'intensification du bout de la bande C_2 —5 165 Å dans le jet de CO_2 est compris entre 1,4 et 1,3.

L'utilisation d'un jet de CO_2 permet l'atténuation des bandes du cyanogène, mais les champs du spectre dans les régions où se trouvent les bandes moléculaires du charbon, ne peuvent pas être utilisées dans des conditions optimales pour la photomesuration de certaines lignes analytiques.



4.2. L'influence du jet d'argon. La décharge en jets d'argon mène à une forte atténuation tant pour les bandes du cyanogène que pour les bandes de C_2 , fait illustrée dans la fig. 5 où sont représentées les courbes d'atténuation pour les trois modes d'envoi du jet d'argon. Le degré d'atténuation arrive à de très petites valeurs aux débits diminués d'argon (2–3 l/min), et se maintient aux mêmes valeurs aussi pour des débits plus grands.

L'influence du type de jet dans ce cas ne se manifeste pas d'une façon particulière pour des débits plus grands que 4 l/min.

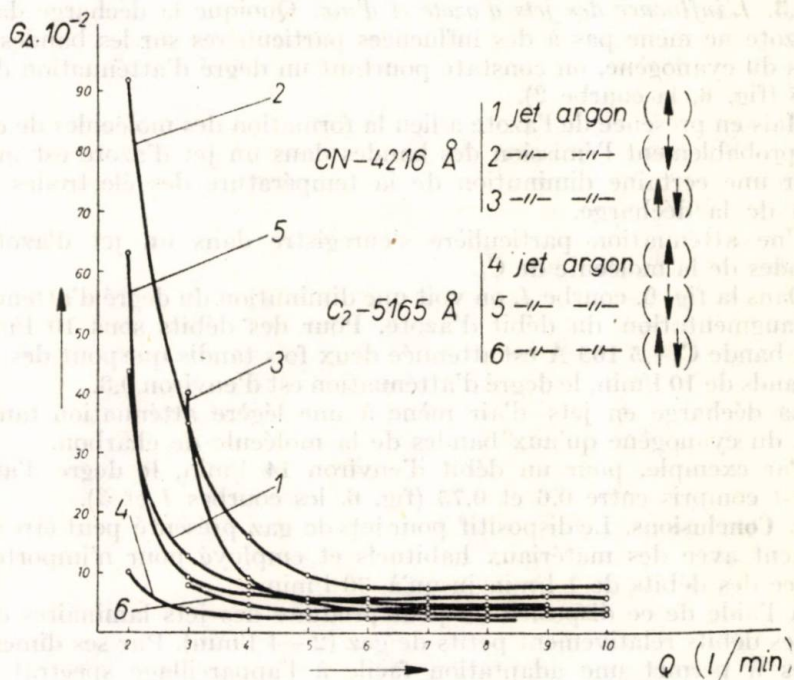


Fig. 5

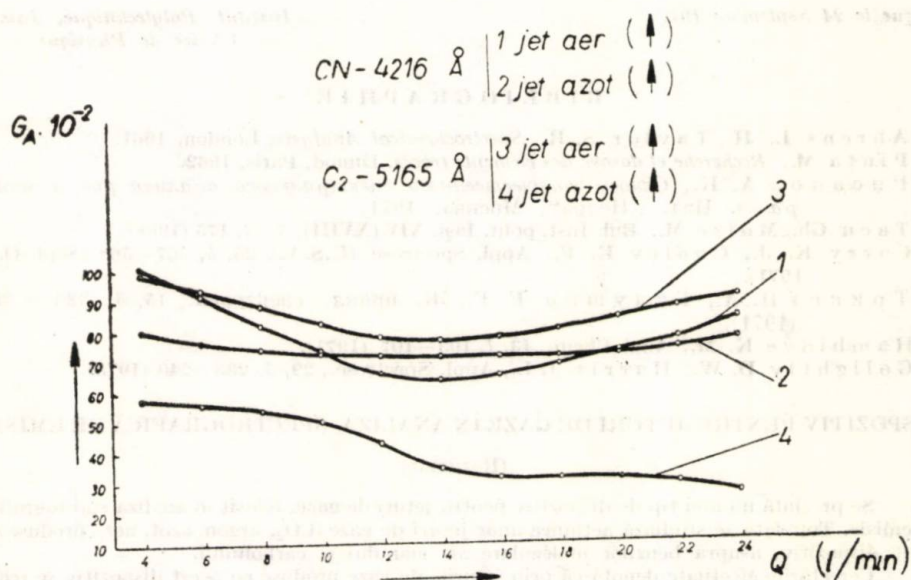


Fig. 6

4.3. L'influence des jets d'azote et d'air. Quoique la décharge dans un jet d'azote ne mène pas à des influences particulières sur les bandes moléculaires du cyanogène, on constate pourtant un degré d'atténuation d'environ 0,8 (fig. 6, la courbe 2).

Mais en présence de l'azote a lieu la formation des molécules de cyanogène; probablement l'émission des bandes dans un jet d'azote est influencée par une certaine diminution de la température des électrodes et du plasma de la décharge.

Une atténuation particulière s'enregistre dans un jet d'azote sur les bandes de la molécule de C_2 .

Dans la fig. 6, courbe 4, on voit une diminution du degré d'atténuation avec l'augmentation du débit d'azote. Pour des débits sous 10 l/min, le bout de bande $C_2-5\ 165\ \text{\AA}$ est atténué deux fois tandis que pour des débits plus grands de 10 l/min, le degré d'atténuation est d'environ 0,3.

La décharge en jets d'air mène à une légère atténuation tant aux bandes du cyanogène qu'aux bandes de la molécule de charbon.

Par exemple, pour un débit d'environ 14 l/min, le degré d'atténuation est compris entre 0,6 et 0,75 (fig. 6, les courbes 1 et 3).

5. Conclusions. Le dispositif pour jets de gaz présenté peut être réalisé facilement avec des matériaux habituels et employé pour n'importe quel gaz avec des débits de 1 l/min jusqu'à 30 l/min.

À l'aide de ce dispositif on peut produire des jets laminaires de gaz pour des débits relativement petits de gaz (2—4 l/min). Par ses dimensions réduites il permet une adaptation facile à l'appareillage spectral usuel.

Avec les jets de gaz produits par ce dispositif, on réalise des atténuations notables des bandes moléculaires du cyanogène et du charbon spécialement quand les débits de gaz sont faibles.

Reçu le 24 Septembre 1977

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Ahrens L. H., Taylor S. R., *Spectrochemical Analysis*. London, 1961.
2. Pinta M., *Recherche et dosage des éléments tracés*. Dunod, Paris, 1962.
3. Рисанов А. К., *Основы количественного спектрального анализа руд и минералов*. Изд. „Недра“, Москва, 1971.
4. Tăcu Gh., Moise M., *Bul. Inst. polit. Iași, XIV (XVIII)*, 3—4, 175 (1968).
5. Curry K. J., Cooley E. F., *Appl. Spectrosc. (U.S.A.)*, 25, 5, 567—568 (Sept.-Oct. 1971).
6. Трикич И. А., Галушко Е. Г., *Ж. прикл. спектроск.*, 15, 3, 383—387 (1971).
7. Hambidge K. M., *Anal. Chem.*, 43, 1, 103—107 (1971).
8. Golightly D. W., Harris J. L., *Appl. Spectrosc.*, 29, 3, 233—240 (1975).

DISPOZITIV PENTRU JETURI DE GAZE ÎN ANALIZA SPECTROGRAFICĂ DE EMISIE

(Rezumat)

Se prezintă un nou tip de dispozitiv pentru jeturi de gaze, folosit în analiza spectrografică de emisie. Totodată se studiază acțiunea unor jeturi de gaze (CO_2 , argon, azot, aer), produse cu acest dispozitiv, asupra benzilor moleculare ale cianului și carbonului.

Cercetările efectuate denotă că prin jeturile de gaze produse cu acest dispozitiv se realizează atenuări deosebite ale benzilor moleculare ale cianului și carbonului, la debite mici de gaze.

LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES GRAINS DE Co-P OBTENUS PAR RÉDUCTION AUTOCATALYTIQUE

PAR

C. COTAE, GHIORGHE CĂLUGĂRU et EMIL LUCA

Les propriétés magnétiques des grains de Co obtenus par réduction autocatalytique spontané ont été étudiés par différents auteurs [1], [2].

Dans la présente Note nous exposons les résultats de l'étude des propriétés magnétiques en fonction du type et des concentrations du stabilisant et des ions de Co existents en solution. Les grains de Co sont obtenus selon une recette de type [1], [2], où le pH est 8,5 et le stabilisant varie entre 1 et 10 g/l, la réaction se déroulant en champ nul. Comme stabilisants nous avons employé de la gélatine, Na-lauryl sulfate et amidon.

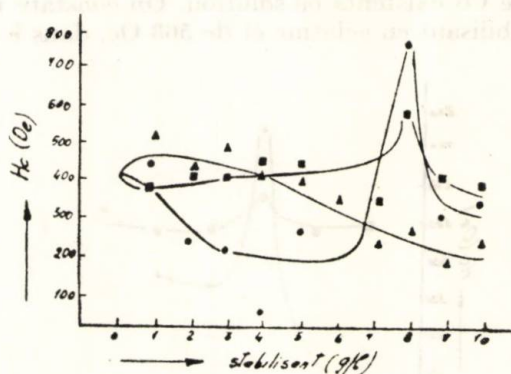


Fig. 1. — Variation de H_c en fonction de la concentration du stabilisant: ● — gélatine; ■ — Na lauryl sulfate; ▲ — amidon.

Dans la fig. 1 nous avons représenté la variation de H_c en fonction de la concentration du stabilisant. On y voit que pour 8 g/l de gélatine, H_c présente une valeur maximale de 745 Oe par rapport à 563 Oe obtenus avec de Na-lauryl sulfate. Quant à l'amidon, H_c diminue continuellement quand sa concentration augmente.

L'intensité d'aimantation présente des variations similaires à H_c pour tous les stabilisants employés. Le rapport M_r/M_m a une valeur constan-

te, environ 0,25 pour Na-lauryl sulfate, tandis que pour la gélatine et l'amidon il diminue continuellement à la mesure de l'augmentation de la concentration du stabilisant.

Dans les micrographies électroniques des épreuves on voit que dans le cas où on n'emploie aucun stabilisant les grains sont aciformes, séparés, d'une longueur de 5 000 Å maximum (fig. 2 a), tandis que pour le stabilisant Na-lauryl sulfate, les grains sont sphériques, enchainés, d'environ 1 500 Å de diamètre (fig. 2 b).

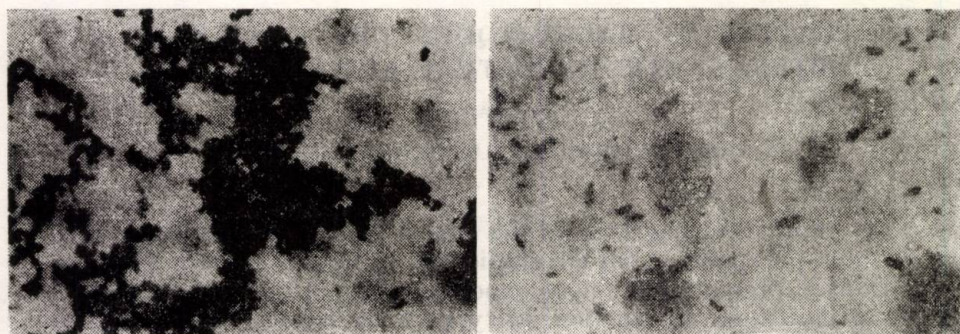


Fig. 2. — Micrographie électronique des grains: a — obtenus sans stabilisant; b — obtenus avec 8 g/l Na-lauryl sulfate.

Dans la fig. 3 on représente la variation de H_c en fonction de la concentration des ions de Co existents en solution. On constate un maximum de 745 Oe pour le stabilisant en gélatine et de 563 Oe, dans le cas de Na-lauryl

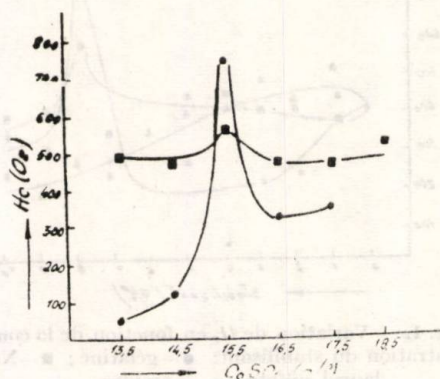


Fig. 3. — Variation de H_c en fonction de la concentration des ions de Co de la solution: ● — gélatine; ■ — Na-lauryl-sulfate.

sulfate qui a 15,5 g/l CoSO₄. L'intensité maximale d'aimantation est de 715 Oe pour la gélatine dans le domaine 15,5–17,5 g/l CoSO₄, tandis que pour Na-lauryl sulfate elle est légèrement croissante, ayant une valeur d'environ 725 Oe.

En conclusion, les propriétés magnétiques dépendent tant du type que de la concentration du stabilisant, autant que de la concentration des ions de Co existents en solution.

Reçue le 6 Novembre 1977

Centre de Physique Technique, Jassy
et
Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Akashi G., U.S. Patent 3 607 218, Sept. 21, 1971.
2. Harada S., Yamanashi T., Ugaji M., IEEE Trans. on Magnetics, MAG-8, 3 (1972).

PROPRIETĂȚILE MAGNETICE ALE PARTICULELOR DE Co-P OBTINUTE PRIN REDUCERE AUTOCATALITICĂ

(Rezumat)

Se studiază proprietățile magnetice ale particulelor de Co-P preparate prin reducere autocatalitică spontană în funcție de tipul și de concentrația de stabilizant, precum și de concentrația de ioni de Co existenți în soluție.

F1812/1

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

1978 OCT 19

Tomul XXIV (XXVIII)



Fasc. 3—4

MATEMATICĂ
SECȚIA I MECANICĂ TEORETICĂ
FIZICĂ

1978

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY
130 St. George Street
Toronto, Ontario
M5S 1A5
Canada



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

Tomul XXIV (XXVIII)

Fasc. 3—4

**SECȚIA I MATEMATICĂ
 MECANICĂ TEORETICĂ
 FIZICĂ**

1978

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. dr. doc. VAL. BLIDARU, **prof. dr. doc. N. V. BOȚAN**, **prof. dr. ing. GH. CAȘLER**,
prof. dr. ing. M. GAFIȚANU (președinte), **prof. dr. P. MÂLCOMETE**,
prof. dr. doc. D. MANGERON, **prof. dr. ing. T. SILION**,
acad. prof. dr. doc. CR. SIMIONESCU, **prof. dr. ing. I. VLAD**

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

I. MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

Prof. dr. doc. AL. CLIMESCU
Prof. dr. doc. N. IRIMICIUC
Prof. dr. doc. EMIL LUCA

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Prof. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
Asist. ing. ANETA BRAIER (redactor)

Secția I

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

S U M A R

	Pag.
GH. COSTOVICI, Cadru topologic general pentru topologii Zariski (engl., rez. rom.)	9
VLADIMIR V. TOPENCEAROV (Bulgaria), Asupra $[n]$ -categoriilor (engl., rez. rom.)	18
D. MOTREANU, Varietăți și fibrare preinlate cu structură de grup (engl., rez. rom.)	19
C. V. NEGOTĂ și C. AL. ȘTEFĂNESCU, Obiecte fuzzy în toposuri; o generalizare a mulțimilor fuzzy (engl., rez. rom.)	25
K. B. OLDHAM (Canada) și J. SPANIER (SUA), Calculul fracțional și aplicațiile sale (engl., rez. rom.)	29
AL. NEAGU, O interpretare geometrică pentru prelungirile olonome ale unui spațiu fibrat principal (engl., rez. rom.)	35
ELENA VAMANU, Conexiuni și structuri aproape produs (engl., rez. rom.)	39
I. GHINEA, Curburi invariante la transformări de conexiuni Finsler metrice (I) (rom., rez. franc.)	47
CĂTĂLINA NIȚESCU, Tensori birecurenți în spații riemanniene (engl., rez. rom.)	53
GH. ANDRICIOAEI și I. GHINEA, Invarianți ai grupurilor de transformări de conexiuni Finsler conform aproape simplectice (rom., rez. franc.)	59
PAVEL TALPALARU, Asupra evaluării soluțiilor ecuațiilor cu diferențe (engl., rez. rom.)	65
N. GRĂDINARU, Soluția unui sistem bi-parametric omogen de evoluție (engl. rez. rom.)	71
VALENTIN HOGEA, Baza de date — suport al unui sistem informatic pentru conducere (rom., rez. franc.)	75
W. WUNDERLICH (Austria), Asupra unei deformări remarcabile a sistemului de generatori al unui con de ordinul doi și o problemă de geodezie (franc., rez. rom.)	81
GH. NISTOR și ANETA BRAIER, Procedee de statistică matematică folosite la evaluarea preciziei vectorului deplasării construcțiilor (rom., rez. franc.)	87
MARIA BORS, CARMEN MARICA și MARIA VIAȘU, Relația fundamentală a axonometriei ortogonale multidimensionale (rom., rez. franc.)	93

	<u>Pag.</u>
I. RUSU, CARMEN MARICA, CORNELIA EFTIMESCU și MARIANA VASILACHE, Proiecția axonometrică ca transformată afină a epurii Monge (rom., rez. franc.)	97
RAM KUMAR SHUKLA și G. LAKSHMINARAYANA (India), Încovoierea blocurilor circulare în învelișuri sferice (engl., rez. rom.)	103
C. FETECĂU, O teoremă de unicitate în teoria liniară a conducției de căldură cu memorie (engl., rez. rom.)	109
ZORAN VRCELJ (SUA), Interpretarea cuasi-newtoniană a dinamicii relativității restrinse (engl., rez. rom.)	111
GH. ZET, Calculul coeficienților s_{jp} din formulele de extensiune pentru $SL(n, C)$ (engl., rez. rom.)	115
C. D. CIUBOTARIU și G. C. FLOREA, Sferă de plasmă relativist generală cu masă gravitațională centrală (engl., rez. rom.)	119
SOFIA MELINTE, MARCEL MOISE, N. MATEESCU și M. LEANCĂ, Metode de determinare a birefrinței optice la fibre (rom., rez. franc.)	125

Section I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

C O N T E N T S

	Pp.
GH. COSTOVICI, General Topological Frame for Zariski's Topologies (English, Romanian summary)	9
VLADIMIR V. TOPENTCHAROV (Bulgaria), Sur les [n]-catégories (French, Romanian summary)	13
D. MOTREANU, Preringed Manifolds and Bundles with Structure Group (English, Romanian summary)	19
C. V. NEGOTÎĂ and C. AL. ȘTEFĂNESCU, Fuzzy objects in Topoi: A Generalization of Fuzzy Sets (English, Romanian summary)	25
K. B. OLDHAM (Canada) and J. SPANIER (USA), Fractional Calculus and its Applications (English, Romanian summary)	29
AL. NEAGU, A Geometrical Interpretation for the Holonomic Prolongations of a Principal Fibre Bundle (English, Romanian summary)	35
ELENA VAMANU, Connections and Almost-product Structure (English, Romanian summary)	39
I. GHINEA, Courbures invariantes aux transformations de connexions finslériennes métriques (I) (Romanian, French summary)	47
CĂTĂLINA NIȚESCU, On Birecurrent Tensors in Riemannian Spaces (English, Romanian summary)	53
GH. ANDRICIOAEI et I. GHINEA, Invariants des groupes de transformations des connexions finslériennes conforme presque symplectiques (Romanian, French summary)	59
PAVEL TALPALARU, Growth Properties of Difference Equations (English, Romanian summary)	65
N. GRĂDINARU, The Solution of a Homogeneous Evolution two-Parameter System (English, Romanian summary)	71
VALENTIN HOGEA, La base de données — support d'un système informatique pour la direction (Romanian, French summary)	75
W. WUNDERLICH (Austria), Sur une déformation remarquable du système des génératrices d'un cône de second degré et un problème de géodésie (French, Romanian summary)	81
GH. NISTOR et ANETA BRAIER, Utilisation des procédés de la statistique mathématique à l'estimation de la précision du vecteur déplacement des constructions (Romanian, French summary)	87

	<u>Pp.</u>
MARIA BORS, CARMEN MARICA et MARIA VIASU, La relation fondamentale de l'axonométrie orthogonale multidimensionnelle (Romanian, French summary)	98
I. RUSU, CARMEN MARICA, CORNELIA EFTIMESCU et MARIANA VASILACHE, La projection axonométrique comme transformée affine de l'épure Monge (Romanian, French summary)	97
RAM KUMAR SHUKLA and G. LAKSHMINARAYANA (India), Bending of a Compressible Circular Block into a Spherical Shell (English, Romanian summary)	103
C. FETECĂU, An Uniqueness Theorem in the Linear Theory of Heat Conducting with Memory (English, Romanian summary)	109
ZORAN VRCELJ (USA), Quasi-Newtonian Interpretation of Special Relativistic Dynamics (English, Romanian summary)	111
GH. ZET, The Calculation of $s_{j,p}$ -Coefficients in $SL(n, C)$ Extension Formulas (English, Romanian summary)	115
C. D. CIUBOTARIU and G. C. FLOREA, General Relativistic Plasma Sphere with Central Graviting Mass (English, Romanian summary)	119
SOFIA MELINTE, MARCEL MOISE, N. MATEESCU et M. LEANCĂ, Méthodes pour la détermination de la biréfringence optique des fibres (Romanian, French summary)	125

Секция I

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Г. КОСТОВИЧ, Общая топологическая картина для топологий Зариского (англ., рез. рум.)	9
ВЛАДИМИР В. ТОПЕНЧАРОВ (Болгария), Об $[n]$ -категориях (англ., рез. рум.)	13
Д. МОТРЯНУ, Предкольцованные многообразия и раслоения с групповой структурой (англ., рез. рум.)	19
К. В. НЕГОИЦЭ и К. А. ШТЕФЭНЕСКУ, Нечеткие объекты в топосах: обобщение нечетких множеств (англ., рез. рум.)	25
К. Б. ОЛЬДЕМ (Канада) и ДЖ. СПАНИЕР (США), Дробное исчисления и её приложения (англ., рез. рум.)	29
АЛ. НЯГУ, Геометрическая интерпретация голономных продолжений главного раслоенного пространства (англ., рез. рум.)	35
ЭЛЕНА ВАМАНУ, Связности и почти произведённые структуры (англ., рез. рум.)	39
И. ГИНЯ, Инвариантные кривизны для преобразований метрических финслеровых связностей (I) (рум., рез. франц.)	47
КЭТЭЛИНА НИЦЕСКУ, Бирекурентные тензоры в римановых пространствах (англ., рез. рум.)	53
Г. АНДРИЧИОАЕИ и И. ГИНЯ, Инварианты групп преобразований финслеровых конформно-почти симплектических связности (рум., рез. франц.)	59
ПАВЕЛ ТАЛПАЛАРУ, Об оценке решении разностных уравнений (англ., рез. рум.)	65
Н. ГРЭДИНАРУ, Решение однородной эволюционной системы с двумя параметрами (англ., рез. рум.)	71
ВАЛЕНТИН ХОДЖЯ, Банк данных — поддержка АСУ для предприятия (рум., рез. франц.)	75
В. ВУНДЕРЛИХ (Австрия), Об одной замечательной деформации системы образующих конуса второго порядка и о задаче геодезии (франц., рез. рум.)	81
Г. НИСТОР и АНЕТА БРАИЕР, Способы математического установления используемые для определения точности вектора смещения соотружении (рум., рез. франц.)	87

	<u>Стр.</u>
МАРИЯ БОРШ, КАРМЕН МАРИКА и МАРИЯ ВИАШУ, Основное соотношение многомерной ортогональной аксонометрии (рум., рез. франц.)	93
И. РУСУ, КАРМЕН МАРИКА, КОРНЕЛИЯ ЭФТИМЕСКУ и МАРИЯНА ВАСИЛАКЕ, Аксонометрическая проекция как аффинное преобразование эпюры Монжа (рум., рез. франц.)	97
РАМ КУМАР ШУКЛА и Г. ЛАКШМИНАРАЯНА (Индия), Изгиб круговых блоков в сферических оболочках (англ., рез. рум.)	103
К. ФЕТЕКЭУ, Теорем единственности в линейном теории тепловой кондукции с памятью (англ., рез. рум.)	109
ЗОРАН ВРЦЕЛИ (США), Квази-ньютоновская интерпретация динамики специальной теории относительности (англ., рез. рум.) . .	111
Г. ЗЕТ, Вычисление коэффициентов $s_{j,p}$ для экстенсионные формулы унитарных представлений группы $SL(n, C)$ (англ., рез. рум.) . .	115
К. Д. ЧЮБОТАРЮ и Г. К. ФЛОРЕА, Сфера из плазмы в общей теории относительности с центральной гравитационной массой (англ., рез. рум.)	119
СОФИЯ МЕЛИНТЕ, МАРЧЕЛ МОИСЕ, Н. МАТЕЕСКУ и М. ЛЯНКЭ, Методы определения оптической двупредломяемости у волокон (рум., рез. франц.)	125

GENERAL TOPOLOGICAL FRAME FOR ZARISKI'S TOPOLOGIES

BY

GH. COSTOVICI

We shall prove some Propositions of general topology which together with the saturate topologies generated of subgroups and ideals, give us Zariski's topologies on rings and modules.

Proposition 1. *If A_i and B_i are subsets of the same set and $A_{i+1} \subseteq A_i$ and $B_{i+1} \subseteq B_i$ for all $i \in N =$ the set of the all positive integers, then*

$$\bigcap_{i \in N} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcap_{i \in N} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in N} B_i \right).$$

Proof. It is obvious that the right side is included in the left. Let $x \in A_i \cup B_i$ be for all $i \in N$. If for every $i \in N$, $x \in A_i$, then $x \in \bigcap_{i \in N} A_i$ and the equality is established. We suppose that there is an $n_1 \in N$ so that $x \notin A_{n_1}$, but then $x \in B_{n_1}$. The existence of $n_2 \in N$ so that $x \notin B_{n_2}$, would imply $x \in A_{n_3} \cup B_{n_3}$ where $n_3 = \max(n_1, n_2)$, contradiction. Therefore $x \in B_i$ for all $i \in N$ and then $x \in \bigcap_{i \in N} B_i$.

Proposition 2. *If the set X is equipped with the increasing sequence of topologies $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in N$, then $\text{Cl}_{\sup t_i}(A) = \bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A)$, $A \subseteq X$ ($\text{Cl}_t =$ the closure in the topology t).*

Proof. a) $A \subseteq \text{Cl}_{\sup t_i}(A)$ since $A \subseteq \text{Cl}_{t_i}(A)$ for all $i \in N$.

b) $\text{Cl}_{\sup t_i}(\text{Cl}_{\sup t_i}(A)) \subseteq \text{Cl}_{\sup t_i}(A)$ since $\bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A) \subseteq \text{Cl}_{t_i}(A) \forall i \in N \Rightarrow \text{Cl}_{t_i}(\bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A)) \subseteq \text{Cl}_{t_i}(\text{Cl}_{t_i}(A)) = \text{Cl}_{t_i}(A) \forall i \in N \Rightarrow \bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(\bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A)) \subseteq \bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A)$.

c) $\text{Cl}_{\sup t_i}(A \cup B) = \text{Cl}_{\sup t_i}(A) \cup \text{Cl}_{\sup t_i}(B)$ since $\bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A \cup B) = \bigcap_{i \in N} (\text{Cl}_{t_i}(A) \cup \text{Cl}_{t_i}(B)) = \bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A) \cup \bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(B)$ (in the last equality we have applied Proposition 1).

d) $\text{Cl}_{\sup t_i}(X) = X$, obviously.

e) $\text{Cl}_{\sup t_i}(A) \subseteq \text{Cl}_{t_i}(A) \forall A \subseteq X \Rightarrow t_i \leq \sup t_i \forall i \in N$.

f) If $t_i \leq t \forall i \in N$, then $\text{Cl}_t(A) \subseteq \text{Cl}_{t_i}(A) \forall i \in N$ and $\forall A \subseteq X$, therefore $\text{Cl}_t(A) \subseteq \bigcap_{i \in N} \text{Cl}_{t_i}(A) = \text{Cl}_{\sup t_i}(A) \Leftrightarrow \sup t_i \leq t$.

Corollary 1. *If the set X is equipped with the topologies $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in N$, then $Cl_{t_n}(A)$ is closed in $\sup t_i$ for every $n \in N$.*

Proof. $Cl_{t_n}(A) \subseteq Cl_{t_i}(Cl_{t_n}(A))$ for every $i \in N \Rightarrow Cl_{t_n}(A) \subseteq \bigcap_{i \in N} Cl_{t_i} Cl_{t_n}(A) = Cl_{\sup t_i}(Cl_{t_n}(A)) \subseteq Cl_{t_n}(Cl_{t_n}(A)) = Cl_{t_n}(A)$.

Proposition 3. *If G is topological multiplicative group by every topology $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in N$, then G is topological group by $\sup t_i$.*

Proof. From Proposition 2 we know that $Cl_{\sup t_i}(A) = \bigcap_{i \in N} Cl_{t_i}(A)$, $A \subseteq G$.

I. We show that the inversion is continuous. $B \subseteq G \Rightarrow (Cl_{\sup t_i}(B))^{-1} \subseteq Cl_{\sup t_i}(B^{-1})$ since $x \in (Cl_{\sup t_i}(B))^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in Cl_{\sup t_i}(B) = \bigcap_{i \in N} Cl_{t_i}(B) \Leftrightarrow x^{-1} \in Cl_{t_i}(B)$ for all $i \in N \Leftrightarrow x \in (Cl_{t_i}(B))^{-1} \subseteq Cl_{t_i}(B^{-1})$ for all $i \in N \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in N} Cl_{t_i}(B^{-1}) = Cl_{\sup t_i}(B^{-1})$.

II. We show that the operation is continuous. D is open in $\sup t_i \Leftrightarrow D = \bigcup_{i \in I} D_i$, D_i open in t_i and $I \subseteq N$. If $p \cdot t$ signifies the product topology on $G \times G$ when G is equipped with the topology t , then $\forall i \in N, p \cdot t_i \leq p \cdot \sup t_i$ or, equivalent, $\forall A \subseteq G \times G$ and $\forall i \in N, Cl_{p \cdot \sup t_i}(A) \subseteq Cl_{p \cdot t_i}(A)$. Let $(x, y) \in Cl_{p \cdot \sup t_i}(A)$ be. If D is open in $\sup t_i$ that is $D = \bigcup_{i \in I} D_i$, D_i open in t_i and $I \subseteq N$, and if $x y \in D$, then, exists $i \in I$, D_i open in t_i and $x y \in D_i$. By hypothesis ($\forall i \in N$, the operation is continuous relative to $p \cdot t_i$ and t_i), exists $(a_1, a_2) \in A$ so that $a_1 a_2 \in D_i \subseteq D$. Therefore the operation is continuous relative to $p \cdot \sup t_i$ and $\sup t_i$.

Corollary 2. *If J is topological ring by every topology $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in N$, then J is topological ring by $\sup t_i$.*

The proof is obvious if one takes into account the content and the proof of the Proposition 3.

It is easy to show that if H is a subgroup of a multiplicative group G , then $Cl_H^s(A) = HA$ defines a topology on G , t_H^s (t_H^s is saturated, [1]). If H is normal subgroup of G then G becomes topological group by t_H where $Cl_{t_H}(A) = HA = AH$ (we mention that Hg is the minimum neighbourhood of g). Similarly, if M is an ideal of a ring J , then J is topological ring by t_M where $Cl_{t_M}(A) = A + M$, $A \subseteq J$.

Corollary 3. *If G is a group equipped with the topologies $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in N$, and if there is an $m \in N$ and H is a subgroup of G so that $t_H^s \leq t_m$, then H is closed in $\sup t_i$, in t_H^s and in t_m .*

Proof. $H \subseteq Cl_{t_m}(H) \subseteq Cl_{t_H^s}(H) = HH = H \Rightarrow H = Cl_{t_H^s}(H) = Cl_{t_m}(H)$ which is closed in $\sup t_i$ by Corollary 1.

Corollary 4. *Let G_1 be a group equipped with the topologies $t_i \leq t_{i+1}$, $i \in N$ and let f be a homomorphism from G_1 to the group G_2 with the unity e_2 . If there is an $m \in N$ so that $t_{f^{-1}(e_2)}^s \leq t_m$ then we have:*

1) f is continuous relative to $\sup t_i$ on G_1 and to an arbitrary topology t on G_2 ;

2) the quotient topology t_q on G_2 relative to f and $\sup t_i$, is the discrete topology, t_q .

Proof. 1) $f(\text{Cl}_{\sup t_i}(A)) = f(\bigcap_{i \in N} (\text{Cl}_{t_i} A)) \subseteq f(\text{Cl}_{t_m}(A)) \subseteq f(\text{Cl}_{f^{-1}(e_2)}(A)) = f(f^{-1}(e_2)A) = f(A) \subseteq \text{Cl}_t(f(A))$.

2) $t_q \leq t_q$ by 1) and therefore $t_q = t_q$. The proof is finished.

If M is an ideal of the associative ring J , we denote $M^0 = J$ and $M^n = \{\sum m_i, m_{i_2} \dots m_{i_n}, \text{ finites, } m_{i_j} \in M, j = 1, n\}$. J equipped with t_{M^n} $n \in N^* = N \cup \{0\}$, is topological ring $(\text{Cl}_{t_{M^n}}(A) = A + M^n)$. By Corollary 2, J is topological ring by $\sup t_{M^n}$ where $\text{Cl}_{\sup t_{M^n}}(A) = \bigcap_{n \in N^*} (A + M^n) = \text{Cl}_Z^M(A)$. t_Z^M is Zariski's topology on J , corresponding to the ideal M [2]. If E is J -module and M is an ideal of the associative ring J , we denote $M^n E = \{\sum m_i e_i, \text{ finites, } m_i \in M^n, e_i \in E\}$. E equipped with $t_{M^n E}$ is topological group $(\text{Cl}_{t_{M^n E}}(A) = A + M^n E)$. By Proposition 3, E is topological group by $\sup t_{M^n E}$ where $\text{Cl}_{\sup t_{M^n E}}(A) = \bigcap_{n \in N^*} \text{Cl}_{t_{M^n E}}(A) = \bigcap_{n \in N^*} (A + M^n E) = \text{Cl}_Z^{ME}(A)$. t_Z^{ME} is Zariski's topology on J -module E corresponding to the ideal $M \subseteq J$. We show that if J is equipped with t_Z^M , then, E equipped with t_Z^{ME} is topological J -module. Let $A \subseteq J \times E$ be and let $(x, u) \in \text{Cl}(A)$ be. Let $xu \in xu + M^i E$ be open neighborhood of xu be (Corollary 7 below). $xu \in xu + M^i E = x(u + M^i E) \subseteq (x + M^i)(u + M^i E)$. We consider the neighborhood $(x + M^i, u + M^i E)$ of (x, u) . Then exists $(y, v) \in A$ so that $y \in x + M^i$ and $v \in u + M^i E \Rightarrow y = x + m_i, m_i \in M^i$ and $v = u + m_{iE}, m_{iE} \in M^i E \Rightarrow xu = yv - m_i v - y m_{iE} + m_i m_{iE} = yv - m_{iE} v, m_{iE} v \in M^i E \Rightarrow yv = xu + m_{iE} \in xu + M^i E$.

In Corollaries 5, 6, 7, 8, 9 below, E is topological J -module by t_Z^{ME} . Only Corollary 9 is not in [2].

Corollary 5. $A + M^i E$ is t_Z^{ME} -open for all $i \in N^*$, $A \subseteq E$.

Indeed $A + M^i E = \bigcup_{a \in A} (a + M^i E) = D \Rightarrow D' = D' + M^i E$ is t_Z^{ME} -closed by Corollary 1 and then $D = t_Z^{ME}$ -open (D' is the complementary of D). We note that $A + M^i E$ is both closed and open in t_Z^{ME} for all $i \in N^*$.

Corollary 6. $\{g + M^i E; g \in E, i \in N^*\}$ forms a basis for t_Z^{ME} .

Indeed, if D is open in t_Z^{ME} , then D' is closed and then $D' = \text{Cl}_Z^{ME}(D') = \bigcap_{i \in N^*} (D' + M^i E) \Rightarrow D = \bigcup_{i \in N^*} (D' + M^i E)'$.

Corollary 7. $\{a + M^i E; a \text{ fixed in } E, i \in N^*\}$ forms a basis for the neighborhood of a .

This follows from Corollary 6.

Corollary 8. A submodule F of E is open in t_Z^{ME} if and only if there is an $m \in N^*$ so that $M^m E \subseteq F$.

Proof. If F is t_Z^{ME} -open, it is a union of classes of equivalence by Corollary 6, and since $0 \in F$, exists $m \in N^*$ so that $0 + M^m E = M^m E \subseteq F$. If there is an $m \in N^*$ so that $M^m E \subseteq F$, then for all $g \in F$ we have $g + M^m E \subseteq g + F = F$. Therefore $F \subseteq \bigcup_{g \in F} (g + M^m E) \subseteq F \Rightarrow F = F + M^m E = \text{open in } t_Z^{ME}$ by Corollary 5. We note that by Corollaries 8 and 3, every t_Z^{ME} -open submodule is t_Z^{ME} -closed.

Corollary 9. *If E_1 is topological J_1 -module by $t_Z^{ME_1}$ and E_2 is J_2 -module equipped with the discrete topology, t_d , and if f is homomorphism of modules from E_1 to E_2 , then f is continuous if and only if there is an $m \in N^*$ so that $M^m E_1 \subseteq f^{-1}(0)$.*

Proof. The implication from the right to the left results from Corollary 4. If f is continuous, 0 from E_2 being t_d -open, we have $f^{-1}(0) = t_Z^{ME_1}$ -open if and only if (by Corollary 8) there is an $m \in N^*$ so that $M^m E_1 \subseteq f^{-1}(0)$.

Received July 4, 1978

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Lorrain Fr., *Notes on Topological Spaces with Minimum Neighborhoods*. Amer. Math. Monthly, 76, 616—627 (1969).
2. Zariski O., Samuel P., *Commutative Algebra*. Vol. II, D. van Nostrand Comp., Princeton, 1960.

CADRU TOPOLOGIC GENERAL PENTRU TOPOLOGII ZARISKI

(Rezumat)

Se demonstrează câteva propoziții de topologie generală, cu ajutorul cărora, utilizând și topologiile saturate, se obțin topologiile Zariski.

SUR LES $[n]$ -CATÉGORIES

PAR

VLADIMIR V. TOPENTCHAROV

1. Généralités sur les $[n]$ -catégories. Poursuivant l'étude des $\{n\}$ -catégories [7], on donne une représentation binaire des $[n]$ -catégories par analogie au théorème de Gluskin—Hosszù pour les n -groupes [1]. Ce résultat est précédé par un rappel de définitions et quelques théorèmes de caractérisation algébrique.

La terminologie et les notations sont celles de [1] pour les n -groupes et de [3] pour les catégories.

Soit M , un univers et $\mathbf{M}$ la catégorie des applications associée. Un *graphe (orienté)* est un triplet $[C] = (C, b, a)$, où $C \in M$, $b, a : C \rightarrow C_0 \in M$, $C_0 \subset C$, $\beta \cdot \beta = \beta$, $\beta \cdot \alpha = \alpha$, $\alpha \cdot \beta = \beta$, $\alpha \cdot \alpha = \alpha$; si $\mathbf{H}$ est une catégorie, son graphe sous-jacent est noté $[\mathbf{H}] = (H, \beta, \alpha)$; $[\mathbf{H}]_0$ est l'ensemble des *sommets* de $[\mathbf{H}]$, identifié à celui des *unités* de $\mathbf{H}$; β est l'application-but et α est l'application-source de $\mathbf{H}$.

Soit les applications $u_i^j : C \rightarrow C_0$ telles que $u_i^j = \alpha$ si $j > i$ et $u_i^j = \beta$ si $j < i$; on pose $V_{[n]} = \{u_i^j; i, j \leq n, i \neq j\}$ et on a $u_i^j \cdot u_s^r = u_s^r$. Notons

$$(V_{[n]}(f), f)_q = (b(f), \dots, b(f), f, a(f), \dots, a(f)),$$

$f \in C$ étant en q -ème position dans le n -uplet, dit n -suite. Soit la loi

$$k_n^{[n]} : \times^{[n]} C \rightarrow C, \quad \times^{[n]} C \subseteq C^n, \quad \text{avec} \quad [(f^i; i \leq n)] = f \in C,$$

n -aire partielle, où $\times^{[n]} C$ est l'ensemble des n -suites composables par k_n .

Définition. On dit que $\mathbf{C}_{[n]} = (C, k_n^{[n]}, V_{[n]})$ est une $[n]$ -catégorie à $[n]$ -graphe sous-jacent $[\mathbf{C}_{[n]}]_{[n]} \cong [C]$ si les axiomes (K) sont vérifiés :

(K.1) $(C, k_n^{[n]})$ est une n -classe; $(C, V_{[n]})$ est un $[n]$ -graphe [7].

(K.2) Si $v_j = \text{pr } j \times^{[n]} C$, on a $\beta \cdot k_n^{[n]} = \beta \cdot v_j$ et $\alpha \cdot k_n^{[n]} = \alpha \cdot v_j$, $j = 1, n$.

(K.3) $\times^{[n]} C = \{(f^i; i \leq n); \alpha(f^i) = \beta(f^{i+1}), i \leq n-1\} \subseteq C^n$.

(K.4) $(V_{[n]}(f), f)_i \in \times^{[n]} C$ et $[(V_{[n]}(f), f)_i] = f$ pour tout $i \leq n$.

(K.5) Étant donnée $(f^s; s \leq 2n-1)$, si $(f^q, \dots, f^{q+n-1}) \in \times_{[n]} \mathbf{C}$ et $(f^1, \dots, f^{q-1}, [(f^q, \dots, f^{q+n-1})], f^{q+n}, \dots, f^{2n-1}) \in \times_{[n]} \mathbf{C}$, pour tout $q \leq n$, alors $[(f^1, \dots, f^{n-1}, [(f^n, \dots, f^{2n-1})])] = [(f^1, \dots, f^{j-1}, [(f^j, \dots, f^{j+n-1})], f^{j+n}, \dots, f^{2n-1})]$, $j \leq n$.

Si $n = 1$, n dans (K.4) on a les catégories polyadiques, dûes parrait-il à A. B a t b e d a t. Les $[n]$ -catégories sont un cas des $\{n\}$ -catégories [7].

On notera $F_0^{[n]}$ l'ensemble des $[n]$ -catégories sur l'univers M_0 .

Étant données les $[n]$ -catégories $\mathbf{C}_{[n]}$ et $\mathbf{H}_{[n]}$, on définit comme pour les algèbres partielles un homomorphisme $F: \mathbf{C}_{[n]} \rightarrow \mathbf{H}_{[n]}$, tel que $F(\mathbf{C}_{[n]_0}) \subseteq \mathbf{H}_{[n]_0}$ et $F([(x^i; i \leq n)]) = [(F(x^i); i \leq n)]$, $(x^i; i \leq n) \in \times_{[n]} \mathbf{C}$ appelé $[n]$ -foncteur; l'ensemble des $[n]$ -foncteurs associés à $F_0^{[n]}$ est noté $F^{[n]}$; pour la loi de composition usuelle d'homomorphismes $F^{[n]}$ est une catégorie, dont l'ensemble des unités est identifié à $F_0^{[n]}$.

À toute catégorie $\mathbf{C}$ est canoniquement associée une $[n]$ -catégorie $\mathbf{C}_{[n]}$. Posons la question inverse: est-il possible de plonger une $[n]$ -catégorie $\mathbf{C}_{[n]}$ dans une catégorie $\mathbf{H}$, $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{H}$? Plus précisément, existe-t-il pour chaque $\mathbf{C}_{[n]} \in F_0^{[n]}$ une catégorie de recouvrement $\mathbf{H}$, i.e. telle que

$$(x^i; i \leq n) \in \times_{[n]} \mathbf{C} \Rightarrow [(x^i; i \leq n)] = x^1.x^2 \dots x^n \in \mathbf{H}.$$

Théorème 1. Pour toute $[n]$ -catégorie $\mathbf{C}_{[n]}$ il existe une catégorie de recouvrement.

Corollaire 1. Toute $[n]$ -catégorie $\mathbf{C}_{[n]}$ peut être canoniquement plongée dans la catégorie libre des chemins $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$ associée à $[\mathbf{C}]$.

Pour les catégories polyadiques voir les démonstrations dans [6]; le cas un peu plus général des $[n]$ -catégories est traité de même.

Corollaire 2 (E. L. Post, Co-set theorem [4]). Pour tout n -groupe il existe un groupe (binaire) de recouvrement.

Proposition 1. Étant donnée une $[n]$ -catégorie $\mathbf{H}_{[n]}$ et un naturel $r \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{H}$ est muni de structure de $[r(n-1)]$ -catégorie $\mathbf{H}_{[r(n-1)]}$ pour la loi $r(n-1)$ -aire induite dans $\mathbf{H}$ par celle de $\mathbf{H}_{[n]}$.

Il suffit de vérifier (K) pour les $r(n-1)$ -suites, la composition étant la concaténarité. $\mathbf{H}_{[r(n-1)]}$ est dite dérivée de $\mathbf{H}_{[n]}$.

Corollaire. À toute catégorie $\mathbf{C}$ est canoniquement associée une $[m]$ -catégorie $\mathbf{C}_{[m]}$, $m \in \mathbf{N}$, notée $(\mathbf{C})_{[m]}$.

Il suffit de poser dans la Proposition 1 $m = r$ et $n = 2$.

Proposition 2. Tout foncteur $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{H}$ peut être canoniquement prolongé en un $[n]$ -foncteur $F_n: (\mathbf{C})_{[n]} \rightarrow (\mathbf{H})_{[n]}$.

Le résultat suivant complète le Théorème 1 et donne encore un lien entre les catégories et les $[n]$ -catégories.

Soit $Q: F \rightarrow F^{[n]}$ le foncteur qui à toute catégorie $\mathbf{H} \in F_0$ associe sa $[n]$ -catégorie dérivée $Q(\mathbf{H}) = (\mathbf{H})_{[n]} \in F_0^{[n]}$. Notons $F_n: \mathbf{C}_{[n]} \rightarrow \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{H})$ le $[n]$ -foncteur d'injection de $\mathbf{C}_{[n]} \in F_0^{[n]}$ dans la catégorie de recouvrement; cette dernière est la $[n]$ -catégorie dérivée de $\mathbf{L}[\mathbf{C}]/\theta$, où θ est une relation d'équivalence sur les chemins de $[\mathbf{C}]$ (voir [6]). On a:

Théorème 2. $(F_n, C_{[n]})$ est une flèche universelle de $C_{[n]}$ vers Q .

Démonstration. Soit $F'_n: C_{[n]} \rightarrow (H)_{[n]}$ un $[n]$ -foncteur et f' son application sous-jacente; celle-ci peut être trivialement prolongée en un foncteur $F'' : L[C] \rightarrow H$, compatible avec θ , d'où le $[n]$ -foncteur $F''_n: \hat{L}(C) \rightarrow (H)_{[n]}$ associé à $F'' : L(C)/\theta \rightarrow H$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_{[n]} & \xrightarrow{F'_n} & (H)_{[n]} \\ F_n \downarrow & \nearrow F''_n & \\ \hat{L}(C) & & \end{array}$$

est manifestement commutatif. L'unicité de F''_n découle du fait qu'il est défini de manière unique sur le support C de $C_{[n]}$.

Corollaire. $\hat{L}(C)$ est une structure libre associée à $C_{[n]}$.

2. Certains isomorphismes de $[n]$ -catégories. Des isomorphismes particuliers de $[n]$ -catégories donnent une caractérisation générale de toutes les $[n]$ -catégories.

Soit $C_{[n]}$ une $[n]$ -catégorie à graphe sous-jacent $[C]$, $L[C]$ la catégorie libre des chemins associée et $L(C)$ — la plus petite catégorie de recouvrement pour $C_{[n]}$. Notons Z_n le demi-groupe multiplicatif des entiers modulo $n-1$, G une application de $H \in F_0$ vers Z_n , qui à tout chemin de $[H]$ associe sa longueur modulo $n-1$ et r_H une relation d'équivalence bicompatible sur H . On note $|X|$ le cardinal de l'ensemble X ; posons $\bar{G} = G^{-1}$. Alors on a :

Théorème 3. Si r_H est telle que $H/r_H \cong Z_n$ et que l'image réciproque de $1 \in Z_n$ donne $H_0 \subseteq \bar{G}(1)$, chaque sous-ensemble $\bar{G}(p)$ de H , image réciproque de $p \in Z_n$, est muni pour la loi de composition n -aire induite par celle de H de la structure de $[n]$ -catégorie.

Démonstration. La condition $H/r_H \cong Z_n$ entraîne $\bar{G}(p) \cap \bar{G}(q) = \emptyset, p \neq q, p, q \in Z_n$ et la suite $(\bar{G}(s); s \leq n)$ forme une partition de H ; utilisant la loi de composition n -aire induite par celle de H dans chaque ensemble $\bar{G}(s), s \leq n$ et les propriétés des $n-1$ -suites unitaires, on montre que $|\bar{G}(p)| = |\bar{G}(q)|, p, q \in Z_n, p \neq q$, deux injections $j: \bar{G}(p) \rightarrow \bar{G}(q)$ et $j': \bar{G}(q) \rightarrow \bar{G}(p)$, telles que $j' = j^{-1} = J$ étant aisément construites; donc les sous-ensembles $\bar{G}(p)$ sont formés de suites $(x^s) \in \bar{G}(p)$ telles que $s \equiv p \pmod{n-1}$. Pour la loi n -aire induite par celle de H , dérivée de la loi binaire conformément de la Proposition 1, $\bar{G}(p)$ une $[n]$ -catégorie, les axiomes (K) étant vérifiés en vertu de la loi induite. Et puisque pour $s=1$ on a $\bar{G}(1) =$ ensemble des n -chemins, $\bar{G}(1)$ est une $[n]$ -catégorie.

Notons $L(s)$ l'ensemble des chemins, éléments de $L[C]$ et tels que

$$(x^p) \in L(s) \Rightarrow p \equiv s \pmod{n-1}.$$

Corollaire. La relation d'équivalence σ sur $L(C)$ correspondante à la partition $(L(s); s \leq n)$ détermine une relation bicompatible σ_L sur $L[C]$ vérifiant les conditions du Théorème 3.

Théorème 4. Toute $[n]$ -catégorie C_n peut être obtenue en munissant la classe d'équivalence associée à $1 \in Z_n$ d'une catégorie libre de chemins de la structure de $[n]$ -catégorie par la loi de composition n -aire qui y est induite par celle de la catégorie libre.

Démonstration. En vertu du Corollaire 1, Théorème 1, $C_{[n]}$ peut être plongée canoniquement dans la catégorie libre des chemins $L[C]$, associée à $C_{[n]}$. Suivant la construction de σ_L on a $L(1) = C$ et en vertu du Corollaire, Théorème 3, $L(1)$, muni de la loi de composition n -aire induite par celle de $L[C]$, est exactement la $[n]$ -catégorie $C_{[n]}$.

Si la loi de composition dans une $[n]$ -catégorie est partout définie, ou binaire, ou partout définie et binaire on a les résultats classiques sur les n -demi-groupes, les catégories ou les demi-groupes,

Toute petite catégorie peut être canoniquement plongée dans une catégorie d'applications [3]. Nous nous proposons de construire une $[n]$ -catégorie, dont les éléments sont certaines applications, toute $[n]$ -catégorie pouvant y être plongée.

Soit $Q \in M_0$, $P = \bigcup_{i \leq n-1} (Q, i) \in M_0$ et $\tilde{P}$ une partition de P à parties différentes de (Q, i) . On dira que $\hat{P} = (P, R_p, Q, n-1)$ est un ensemble n -fibré si pour tout ensemble $T \in \tilde{P}$ il existe une bijection de $T \cap (Q, i)$ sur $T \cap (Q, i+1)$ et où R_p est la relation d'équivalence associée à $\tilde{P}$.

Considérons l'ensemble $S_n(\hat{P})$ des applications $f: \mathcal{P}(P) \rightarrow \mathcal{P}(P)$, où $\mathcal{P}(P)$ est l'ensemble des parties de $\tilde{P}$ et telles que

$$(i) \quad \alpha(f) \in \tilde{P} \quad \text{et} \quad \beta(f) \subseteq B \in \tilde{P};$$

$$(ii) \quad x \in (Q, i) \cap \alpha(f) \Rightarrow f(x) \in (Q, i+1).$$

On dira que $S_n(\hat{P})$ est l'ensemble des applications n -fibrées pour $\hat{P}$.

Soit la loi de composition n -aire dans $S_n(\hat{P})$ suivante

$$(*) \quad [(f_1, \dots, f_n)] = f_1 \dots f_n$$

si et seulement si

$$\beta(f_i) \subseteq \alpha(f_{i+1}), \quad i \leq n-1.$$

Proposition 3. $S_n(\hat{P})$ est pour $(*)$ une $[n]$ -catégorie notée $S_{[n]}(\hat{P})$.

Démonstration. (K.1), (K.2), (K.5) sont vérifiés en vertu de la construction de $(*)$. (K.3) découle des conditions de composabilité de $(*)$.

Comme $(\beta(f), \dots, \beta(f), f, \beta(f), \dots, \beta(f)) \in {}^{[n]}C$ et $[(\beta(f), \dots, \beta(f), f, \beta(f), \dots, \beta(f))] = f$, on a des $n-1$ -suites unitaires, d'où (K.4).

Si $n=2$, $S(\hat{P})$ est une catégorie d'applications associée à $\hat{P}$.

Théorème 5. Toute $[n]$ -catégorie est isomorphe à une sous- $[n]$ -catégorie d'applications n -fibrées.

Démonstration. Soit $\mathbf{C}_{[n]} \in \mathbf{F}_0^{[n]}$ et $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$ la catégorie libre des chemins sur le graphe $[\mathbf{C}]$, sous-jacent à $\mathbf{C}_{[n]}$. Puisque $|\bar{G}(p)| \cong |\bar{G}(q)| \cong \cong Q$ (Théorème 3), on a $\mathbf{L}[\mathbf{C}] = \bigcup_{i \leq n-1} (Q, i)$; α^{-1} détermine une partition de $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$ et par suite une relation d'équivalence R_α . Alors le quadruplet $\hat{\mathbf{L}} = (\mathbf{L}[\mathbf{C}], R_\alpha, Q, n-1)$ est un ensemble n -fibré; $S_n(\hat{\mathbf{L}})$ et $S_{[n]}(\hat{\mathbf{L}})$ sont construits comme dans la Proposition 3. Soit l'application $u: \mathbf{C} \rightarrow S_n(\hat{\mathbf{L}})$:

$$q \in \mathbf{C}, g \in \hat{\mathbf{L}}, (g, \bar{g}) \in \mathbf{L}[\mathbf{C}] \times \mathbf{L}[\mathbf{C}] \Rightarrow \bar{g}.g = u(g)(\bar{g});$$

évidemment $u(g) \in S_n(\hat{\mathbf{L}})$ et u définit un $[n]$ -foncteur $U: \mathbf{C}_{[n]} \rightarrow S_{[n]}(\hat{\mathbf{L}})$; si $g = e \in \mathbf{C}_0$, pour deux éléments $g', g'' \in \mathbf{C}$, $g' \neq g''$, on a:

$$e.g' = u(g')(e) \text{ et } e.g'' = u(g'')(e)$$

et en vertu des propriétés des unités $u(g') = u(g'') \Rightarrow g' = g''$; donc le $[n]$ -foncteur U est injectif.

3. Représentation binaire de $[n]$ -catégories. Étant donnée $\mathbf{C}_{[n]} \in \mathbf{F}_0^{[n]}$ on cherche un couple $(\mathbf{C}, \theta)$, où $\mathbf{C} \in \mathbf{F}_0$ et $\theta = (\theta_s: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \in \mathbf{F}; s \leq n)$, tel que tout composé dans $\mathbf{C}_{[n]}$ puisse être représenté par un composé dans $\mathbf{C}$, dont les composantes sont les transformées $y_s = \theta_s(x_s)$, $s \leq n$, de celles du composé dans $\mathbf{C}_{[n]}$.

Soit $\mathbf{C}_{[n]}$ la $[n]$ -catégorie envisagée et $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$ la catégorie libre des chemins associée au graphe $[\mathbf{C}]$, sous-jacent à $\mathbf{C}_{[n]}$.

Proposition 4. Étant donné un composé n -aire $[(x^n)]$ dans $\mathbf{C}_{[n]}$ et le composé „long“ $x^1 \circ \dots \circ x^n$ pour la loi $\circ$ dans $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$ des mêmes flèches, il existe un endomorphisme $F: \mathbf{L}[\mathbf{C}] \rightarrow \mathbf{L}[\mathbf{C}]$ pour lequel

$$[(x^n)] = [(x^1, \dots, x^n)] = F(x^1 \circ \dots \circ x^n).$$

Démonstration. Le composé $x = [(x^n)]$ étant un morphisme de $\mathbf{C}_{[n]}$, $x \in \mathbf{L}[\mathbf{C}]$ et en vertu de (K.2) $\alpha(x) = \alpha(x^n)$, $\beta(x) = \beta(x^1)$; d'autre part si $x' = x^1 \circ \dots \circ x^n$, on a $\alpha(x') = \alpha(x^n)$ et $\beta(x') = \beta(x^1)$. On considère alors une application $F: \mathbf{L}[\mathbf{C}] \rightarrow \mathbf{L}[\mathbf{C}]$, telle que $F(e) = e$ pour tout $e \in (\mathbf{L}[\mathbf{C}])_0$ et $F(x') = x$, compatible avec la loi binaire dans $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$. C'est bien un foncteur, qui est le foncteur cherché.

Soit $\mathbf{H}$ une catégorie, n un entier naturel et F un endofoncteur de $\mathbf{H}$ vérifiant les conditions $F(e) = e \in \mathbf{H}_0$ et $F^n = F$. Alors au quadruplet $T = T(\mathbf{H}, \mathbf{H}_0, F, n)$ on associe la loi n -aire suivante:

$$(**) \quad [(x^n)] = x^1 \circ F(x^2) \circ F^2(x^3) \circ \dots \circ F^{n-2}(x^{n-1}) \circ F^{n-1}(x^n).$$

Proposition 5. Pour la loi $(*)$ l'ensemble $\mathbf{H}$ est une $[n]$ -catégorie canoniquement associée au quadruplet T , notée $\mathbf{H}_{[n]}(T)$.

La vérification des axiomes (K) est immédiate.

Théorème 6. Toute $[n]$ -catégorie $\mathbf{C}_{[n]}$ est isomorphe à une sous- n -catégorie de $\mathbf{L}[\mathbf{C}]_{[n]}(T)$ pour $T = T(\mathbf{L}[\mathbf{C}], (\mathbf{L}[\mathbf{C}])_0, F, n)$.

Démonstration. T étant construit comme ci-dessus, $\mathbf{L}[\mathbf{C}]$ est munie par $(*)$ de structure de $[n]$ -catégorie en vertu de la Proposition 5;



d'autre part $C \subset L[C]$ (1-chemins) et la loi dans $C_{[n]}$ étant compatible avec celle de $L[C]$, l'est aussi, à un isomorphisme près avec $(*)$. Donc $C_{[n]}$ est une sous- $[n]$ -catégorie de $(L[C], (*))$.

Corollaire. Pour toute $C_{[n]} \in F_0^{[n]}$ il existe $H \in F_0$ telle que $C_{[n]}$ soit isomorphe à la $[n]$ -catégorie associée à $T = T(H, H_0, F, n)$.

On en déduit, si $C_{[n]}$ est un n -groupe ou n -demi-groupe, le théorème de Gluskin—Hosszú (voir [1], [2]).

Théorème 7. Une algèbre partielle (Q, k'_n, b, a) est une $[n]$ -catégorie si et seulement si elle est isomorphe à la structure n -aire définie sur $S = S(H, H_0, F, n)$ pour une catégorie H , où $F: H \rightarrow H$ est un endofoncteur.

Reçue le 12 Mars 1978

Centre de Mathématiques Appliquées,
Sofia, Bulgarie

BIBLIOGRAPHIE

1. Белоусов В. Д., n -арные квазигруппы. Изд. Штиинца, Кишинев, 1972.
2. Глускин Л. М., Позиционные оперативы. Мат. Сб., 68 (110), 3, 444—472 (1965).
3. Mac Lane S., Categories for the Working Mathematician. Springer, New—York, Heidelberg — Berlin, 1971.
4. Post E. L., Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 48, 208—350 (1940).
5. Topentcharov V., Éléments de la théorie des catégories polyadiques. CRAS de Bulgarie, 27, 6, 743—746 (1974).
6. Topentcharov V., Éléments de la théorie des catégories polyadiques. Alg. Universalis, 7/3, 277—293 (1977).
7. Topentcharov V., Théorie des $\{n\}$ -catégories. Math. Nachr. (à paraître).

ASUPRA $[n]$ -CATEGORIILOR

(Rezumat)

Se prezintă o definiție îmbunătățită a $[n]$ -categoriilor (§1). În § 2 se studiază proprietățile categoriilor de acoperire (teorema 2), unele izomorfisme (teoremele 3 și 4) precum și o metodă universală de construcție a $[n]$ -categoriilor (teorema 5). În § 3 se prezintă o reprezentare binară a $[n]$ -categoriilor, un analog al teoremei lui Gluskin pentru n -grupuri (teorema 6) și un criteriu de $[n]$ -categoricitate a unei structuri algebrice date (teorema 7).

PRERINGED MANIFOLDS AND BUNDLES WITH STRUCTURE GROUP

BY

D. MOTREANU

In this paper we define the concept of preringed manifold, i.e. a space locally determined by „compatible“ triples $(E, \mathcal{F}, V)$, where E is a topological space, $\mathcal{F}$ is a presheaf on E of real-valued functions and V is a Banach space. Using this concept we can study in a „differential“ manner some important spaces that, generally, are not differentiable manifolds: topological manifolds, locally-trivial bundles, quotient spaces of manifolds, differential spaces ([6]) etc.

We shall analyse the topology and the tangent space of a preringed manifold and the tangent bundle of a differentiable preringed manifold. We shall generalize the Lie groups to obtain preringed groups and we shall prove a theorem of classification of the preringed bundles with such structure group.

Notations. If $\mathcal{F}$ is a presheaf on a topological space E , its sheaf of germs is denoted by $[\mathcal{F}]$ with fibers $[\mathcal{F}]_x$, $x \in E$, and if U is an open subset of E , the restriction of $\mathcal{F}$ to E is denoted also by $\mathcal{F}$.

Definition 1. A *preringed space* is a pair $(E, \mathcal{F})$ where E is a topological space and $\mathcal{F}$ is a presheaf on E such that:

(i) if U is an open subset of E , $\mathcal{F}(U)$ is a set of real-valued continuous functions $U \rightarrow \mathbb{R}$, and if $U \subset V$, $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ is the usual restriction;

(ii) for $x \in E$, $[f_1]_x, \dots, [f_n]_x \in [\mathcal{F}]_x$, D open subset of $\mathbb{R}^n$ and $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -map, then $[F \circ (f_1, \dots, f_n)]_x \in [\mathcal{F}]_x$ (if the composition is defined).

For $A \subset [\mathcal{F}]_x$, put $A^\infty = \{[F \circ (f_1, \dots, f_n)]_x / [f_1]_x, \dots, [f_n]_x \in A \text{ and } F \text{ is as in the Definition 1}\}$. A^∞ is an algebra with respect to the usual operations and then we can define $D(A^\infty) = \{\delta: A \rightarrow \mathbb{R} / \delta \text{ is } \mathbb{R}\text{-linear and } \delta([f]_x [g]_x) = \delta([f]_x) g(x) + f(x) \delta([g]_x), [f]_x, [g]_x \in A^\infty\}$.

Definition 2. Let $(E, \mathcal{F})$, $(E', \mathcal{F}')$ be preringed spaces. A continuous map $h: E \rightarrow E'$ is called *morphism of preringed spaces* if for any $x \in E$ and $[f']_{h(x)} \in [\mathcal{F}']_{h(x)}$, we have $[f' \circ h]_x \in [\mathcal{F}]_x$. The linear map $h_{*x}: D([\mathcal{F}]_x) \rightarrow D([\mathcal{F}']_{h(x)})$, $h_{*x}(\delta)[f']_{h(x)} = \delta([f' \circ h]_x)$, $\delta \in D([\mathcal{F}]_x)$, $[f']_{h(x)} \in [\mathcal{F}']_{h(x)}$, is called the *differential* of h at $x \in E$.

Lemma 1. The preringed spaces and their morphisms form a category and it is true the „chain rule“: $(h' \circ h)_{*x} = h'_{*h(x)} \circ h_{*x}$. Let $\mathcal{C}$ be a

subcategory of Top in which there is the direct product and let $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ be the full subcategory of the preringed spaces $(E, \mathcal{F})$ with $E \in \text{ob } \mathcal{C}$. Then it also admits the direct product (denoted by $(\Pi E_i, \Pi \mathcal{F}_i)$ for each family $\{(E_i, \mathcal{F}_i)\}_{i \in I}$, $(E_i, \mathcal{F}_i) \in \text{ob } \mathcal{P}_\mathcal{C}$.

Proof. If ΠU_i is an open subset of ΠE_i , we define $(\Pi \mathcal{F}_i)(\Pi U_i) = \{g: \Pi U_i \rightarrow R \text{ continuous} \mid (E', \mathcal{F}') \in \text{ob } \mathcal{P}_\mathcal{C}, h_i: (E', \mathcal{F}') \rightarrow (E_i, \mathcal{F}_i) \text{ are morphisms in } \mathcal{P}_\mathcal{C}, x' \in h_i^{-1}(U_i), \text{ then } [g \circ (h_i)_{i \in I}]_x \in [\mathcal{F}']_{x'}\}$.

Définition 3. A preringed chart in the set M is a family $(U, (E, \mathcal{F}), \varphi, V, \{[\mathcal{F}]_{\varphi(x)}^0\}_{x \in U}, \{k_x\}_{x \in U}, \{l_x\}_{x \in U})$ where $U \subset M$, $(E, \mathcal{F}) \in \text{ob } \mathcal{P}_\mathcal{C}$, V is a Banach space, $\varphi: U \rightarrow E$ is bijective and for $x \in U$, $[\mathcal{F}]_{\varphi(x)}^0$ is a subset of $[\mathcal{F}]_{\varphi(x)}$ whose elements non-constant germs, $k_x: [\mathcal{F}]_{\varphi(x)}^0 \rightarrow V$ is injective so that $k_x([\mathcal{F}]_{\varphi(x)}^0) = B$ is a vector basis of V and $l_x: V \rightarrow D([\mathcal{F}]_{\varphi(x)}^0)$ is linear and injective. We say that $(E, \mathcal{F})$ is the local model and V is the vector model of the chart (U, φ) .

Définition 4. A preringed atlas on a set M is a family of preringed charts $\mathcal{A} = \{(U_i, (E_i, \mathcal{F}_i), \varphi_i, V_i, \{[\mathcal{F}_i]_{\varphi_i(x)}^0\}_{x \in U_i}, \{k_{ix}\}_{x \in U_i}, \{l_{ix}\}_{x \in U_i})\}_{i \in I}$ such that $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ and for $i, j \in I$, with $U_i \cap U_j \neq \emptyset$:

(I) $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ is an open subset of E_i and $\varphi_j \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}: (\varphi_i(U_i \cap U_j), \mathcal{F}_i) \rightarrow (\varphi_j(U_i \cap U_j), \mathcal{F}_j)$ is a morphism of preringed spaces with the properties: 1) $[f_j \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}]_{\varphi_i(x)} \in [\mathcal{F}_i]_{\varphi_i(x)}^0$ for each $[f_j]_{\varphi_j(x)} \in [\mathcal{F}_j]_{\varphi_j(x)}^0$, $x \in U_i \cap U_j$; 2) $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{* \varphi_i(x)}(l_{ix}(V_i)) \subset l_{jx}(V_j)$;

(II) The linear map $D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)): V_i \rightarrow V_j$ defined on the basis $B_i = k_{ix}([\mathcal{F}_i]_{\varphi_i(x)}^0)$ of V_i by $D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))(v_i) = k_{jx}[k_{ix}^{-1}(v_i) \varphi_i \varphi_j^{-1}]_{\varphi_j(x)} v_i \in B_j$, is continuous and $l_{jx} \circ D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) = (\varphi_j \varphi_i^{-1})_{* \varphi_i(x)} \circ l_{ix}$.

Two preringed atlases $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ on M are compatible if $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ is a preringed atlas. An equivalence class of compatible preringed atlases is called a preringed structure on M and M is a preringed manifold. We say that a preringed manifold is differentiable if $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(U_i \cap U_j), \mathcal{F}_i) \rightarrow (L(V_i, V_j), \mathcal{C}^\infty)$ is a morphism of preringed spaces for $i, j \in I$ with $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ($\mathcal{C}^\infty$ is the presheaf of C^∞ -functions on the Banach space $L(V_i, V_j)$).

Example 1. Let M be a Banach C^k -differentiable manifold, $k \geq 1$, and let $\{(U_i, \varphi_i, V_i)\}_{i \in I}$ be a C^k -atlas of M . Then M is a preringed manifold with local models $(\varphi_i(U_i), \mathcal{C}^k)$ and vector models V_i . By [3] we obtain that a preringed manifold M is a C^k -Banach manifold if and only if M has a preringed atlas with local models $(D_i, \mathcal{C}^\infty)$ and vector models V_i , D_i open subset of V_i . M is just a differentiable preringed manifold.

Example 2. Let M be a topological n -dimensional manifold with the atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ and let $\{L_i\}_{i \in I}$ a family of linear isomorphisms of $\mathbb{R}^n$. Then we have the following preringed atlas $\{(U_i, (\varphi_i(U_i), \mathcal{C}^0), \varphi_i, \mathbb{R}^n, \{[\mathcal{C}^0]_{\varphi_i(x)}^0\}_{x \in U_i}, \{k_{ix}\}_{x \in U_i}, \{l_{ix}\}_{x \in U_i})\}_{i \in I}$ where for a fixed $i \in I$ such that $x \in U_i$, $[\mathcal{C}^0]_{\varphi_i(x)}^0 = \{[pr_s]_{\varphi_i(x)} \mid \dots, [pr_n]_{\varphi_i(x)}\}$ (pr_s is the projection with respect to e_s), $k_{ix}([pr_s]_{\varphi_i(x)}) = e_s$, $l_{ix}(v)[f]_{\varphi_i(x)} = df_{\varphi_i(x)}(v)$ (the differential of f at $\varphi_i(x)$), $v \in \mathbb{R}^n$, $[f]_{\varphi_i(x)} \in [\mathcal{C}^0]_{\varphi_i(x)}^0 = [\mathcal{C}^\infty]_{\varphi_i(x)}$, and for any other $j \in I$ with $x \in U_j$, $[\mathcal{C}^0]_{\varphi_j(x)}^0$ and l_{jx} are uniquely determined by

(I) and (II) and $k_{jx}[f]_{\varphi_j(x)} = L_j(k_{ix}[f \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}]_{\varphi_i(x)}), [f]_{\varphi_j(x)} \in [\mathcal{O}^0]_{\varphi_j(x)}$. M is then a differentiable preringed manifold.

Example 3. If M and M' are (differentiable) preringed manifolds, then $M \times M'$ is also a (differentiable) preringed manifold.

Remark 1. In [1] the complex manifolds and analytic spaces are studied in a similar manner, but using ringed spaces. From (I) we have:

Proposition 1. *Let M be a preringed manifold with the preringed atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Then M has a uniquely topology such that for each $i \in I$ U_i is an open subset of M and φ_i is a homeomorphism.*

Definition 5. M, M' be preringed manifolds. A map $h: M \rightarrow M'$ is a *morphism of preringed manifolds* if for each $x \in M$ there are preringed charts (U_i, φ_i) and (U_j, φ_j) such that $x \in U_i$, $h(U_i) \subset U_j$ and $\varphi_j' h \varphi_i^{-1}: E_i, (\mathcal{F}_i) \rightarrow (E_j, (\mathcal{F}_j))$ is morphism of preringed spaces. If M and M' are differentiable preringed manifolds, the morphism $h: M \rightarrow M'$ is called *differentiable* if: (a) $[f_j' \circ \varphi_j' \circ h \circ \varphi_i^{-1}]_{\varphi_i(x)} \in [\mathcal{F}_i]_{\varphi_i(x)}^{\infty}$ for each $[f_j']_{\varphi_j(x)} \in [\mathcal{F}_j]_{\varphi_j(x)}^0$ and $(\varphi_j' \circ h \circ \varphi_i^{-1})_{* \varphi_i(x)}(l_{ix}(V_i)) \subset l_{jh(x)}(V_j)$; (b) $D(\varphi_j' \circ h \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) = l_{jh(x)}^{-1} \circ (\varphi_j' \circ h \circ \varphi_i^{-1})_{* \varphi_j(x)} \circ l_{ix}: V_i \rightarrow V_j$ is continuous and $(E_i, (\mathcal{F}_i)) \rightarrow (L(V_i, V_j), \mathcal{O}^\infty), y \rightarrow D(\varphi_j' \circ h \circ \varphi_i^{-1})(y)$ is a morphism of preringed spaces. This definition does not depend on the choices of the charts and thus the (differentiable) preringed manifolds form a category.

Let M be a preringed manifold and $x \in M$. Take $\mathcal{A}(x) = \{(U, \varphi, v) / (U, \varphi) \text{ is a preringed chart of } M \text{ such that } x \in U, v \in V, V \text{ the vector model of } (U, \varphi)\}$. In $\mathcal{A}(x)$ we have the equivalence relation: $(U, \varphi, v) \sim (U', \varphi', v') \Leftrightarrow D \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(v) = v'$.

An equivalence class $[U, \varphi, v]$ is called a *tangent vector* and $T_x M = \{[U, \varphi, v] / (U, \varphi, v) \in \mathcal{A}(x)\}$ is the *tangent space of M at $x \in M$* .

Proposition 2. *We can organize $T_x M$ as banachisable space isomorphic to the vector model V of any preringed chart (U, φ) of M with $x \in M$. If M is just a differentiable manifold, then $T_x M$ coincides with its tangent space at $x \in M$.*

Proof. Let (U, φ) be a preringed chart of M with $x \in M$ and V its vector model. $\Theta_{U,x}: V \rightarrow T_x M, \Theta_{U,x}(v) = [U, \varphi, v]$ is then a bijective map and then we follow [4].

Let M be a differentiable preringed manifold with the atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Let $(E_i, (\mathcal{F}_i))$ and V_i be respectively the local model and the vector model of the chart (U_i, φ_i) . We define $TM = \vee T_x M$ (disjoint union) and $\Pi: TM \rightarrow M, \Pi(e) = x, e \in T_x M$. If $\varphi_i': \Pi^{-1}(U_i) \rightarrow E_i \times V_i, \varphi_i'(e) = (\varphi_i(\Pi(e)), \Theta_{U_i, \Pi(e)}(e)), e \in \Pi^{-1}(U_i)$, then TM is a preringed manifold with the atlas $\{(\Pi^{-1}(U_i), \varphi_i')\}_{i \in I}$ and $\Pi: TM \rightarrow M$ is a morphism of preringed manifolds. Thus we obtain:

Proposition 3. *There is a covariant functor T from the category of the differentiable preringed manifolds to the category of the preringed manifolds such that for any $M, \Pi: TM \rightarrow M$ is a vector bundle called the tangent bundle of M .*

T restricted to the category of the differentiable manifolds is just the usual tangent bundle functor.

Definition 6. Let G be a group and e its unit. G is a *preringed group* if G is also a preringed manifold such that $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy^{-1}$, be a morphism of preringed manifolds.

We have an *action of G on the preringed manifold M* if there is a morphism $G \times M \rightarrow M$ (denoted $(g, x) \rightarrow g \cdot x$) such that: (a) $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x, g, g' \in G, x \in M$; (b) $e \cdot x = x, x \in M$.

Definition 7. Let M and F be preringed manifolds, E an arbitrary set $\Pi: E \rightarrow M$ a map and G a preringed group which acts effectively on F . An *atlas of preringed bundles on M with fibre F and structure group G* is a family $\mathcal{U} = \{U_i, \tau_i\}_{i \in I}$ where U_i is an open subset of $M, \tau_i: \Pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ a bijective map so that $\text{pr}_1 \circ \tau_i = \Pi / \Pi^{-1}(U_i)$ and if $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ there is a morphism of preringed manifolds (named *transition map*) $\omega_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow F$ for which $\tau_j \tau_i^{-1}(x, f) = (x, \omega_{ij}(x) \cdot f), x \in U_i \cap U_j, f \in F, i, j \in I$.

Analogously as in Definition 4 we can define a *preringed bundle E with fiber F and structure group G* as an equivalence class of atlas of preringed bundles and we denote it by (E, Π, M, F, G) .

In particular if F is a Banach space and G is a subgroup of $\text{Isom}(F)$ we obtain the *preringed vectors bundles* and if $F = G$ and G acts on itself by left translations we have the *principal preringed bundles*.

Example 4. The tangent bundle of a differentiable preringed manifold is a vector preringed bundle.

Proposition 4. If (E, Π, M, F, G) is a preringed bundle, then E has a uniquely structure of preringed manifold, such that $\tau_i: \Pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ is an isomorphism of preringed manifolds, $i \in I$. $\Pi: E \rightarrow M$ is then a morphism of preringed manifolds.

Proof. We organize $\Pi^{-1}(U_i)$ with the unique structure such that $\tau_i: \Pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ be an isomorphism of preringed manifolds. Then on each $\Pi^{-1}(U_i) \cap \Pi^{-1}(U_j)$ the induced structures are compatible.

Definition 8. Let (E, Π, M, F, G) and (E', Π', M, F, G) be preringed bundles (with the same fibre and structure group). Let $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ and $\{(U'_i, \tau'_i)\}_{i \in I}$ be the atlases of preringed bundle on E and E' respectively. A map $h: E \rightarrow E'$ is a *morphism of preringed bundles* if $\Pi'_0 h = \Pi$ and for each $i \in I$ there is a morphism of preringed manifolds (called the *local map of h*) $\omega_i: U_i \rightarrow G$ such that: $\tau'_i \circ h \circ \tau_i^{-1}(x, f) = (x, \omega_i(x) \cdot f), x \in U_i, f \in F$.

This definition does not depend on the chosen preringed charts.

Proposition 5. The following statements are true:

a) if $(E, \Pi, M, F, G), (E', \Pi', M, F, G)$ are preringed bundles and $h: E \rightarrow E'$ is morphism of preringed bundles, then $h: E \rightarrow E'$ is a morphism of preringed manifolds;

b) the preringed bundles over M with fibre F and structure group G form a category denoted by $SP(M, F, G)$;

c) $SP(M, F, G)$ is just a groupoid and $SP(\cdot, F, G)$ is a covariant functor.

Proof. For a) and b) we shall only remark that if $h: E \rightarrow E', h': E' \rightarrow E''$ are morphisms in $SP(M, F, G)$ with the local maps $\omega_i, \omega'_i: U_i \rightarrow G$, then $\tilde{\omega}_i: U_i \rightarrow G, \tilde{\omega}_i(x) = \omega'_i(x) \cdot \omega_i(x)$, is the local map for $h' \circ h: E \rightarrow E''$. For c) let $h: M' \rightarrow M$ be a morphism of preringed mani-

folds and $(E, \Pi, M, F, G) \in SP(M, F, G)$. We define $h^*E = \{(x', e)/x' \in M', e \in E, h(x') = \Pi(e)\}$ and $h^*(\Pi) : h^*E \rightarrow M', h^*(\Pi) = \text{pr}_1$. If ω_{ij} are the transition maps of E , then $\omega_{ij} = \omega_{ij} \circ h$ are the transition maps of h^*E . So $(h^*(E), h^*(\Pi), M', F, G) \in SP(M', F, G)$.

Let $(E, \Pi, M, F, G) \in SP(M, F, G)$ with the atlas of preringed bundle $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ and the transition maps $\omega_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$. On $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ we have $\omega_{ik} = \omega_{jk} \omega_{ij}$. So $\omega, \omega(i, j) = \omega_{ij}$, is a 1-dimensional cocycle of the cover $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ with coefficients in the sheaf of germs of morphisms of preringed manifolds $M \rightarrow G$, denoted by G_p . Then $\omega \in H^1(\mathcal{U}, G_p)$. If $\{(U'_j, \tau'_j)\}_{j \in J}$ with the 1-cocycle ω' is an atlas equivalent with $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ ($\omega' \in H^1(\mathcal{U}', G_p)$, $\mathcal{U}' = \{U'_j\}_{j \in J}$), then ω and ω' determine the same class $[\omega] \in H^1(M, G_p) = \lim_{\rightarrow} H^1(\mathcal{U}, G_p)$ (see [2]). In fact we

can obtain an atlas of preringed bundle $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in K}$ such that there are maps $\sigma : K \rightarrow I$ and $\sigma' : K \rightarrow J$ for which $W_k \subset U_{\sigma(k)} \cap U_{\sigma'(k)}$, $k \in K$. For $r, s \in K$ with $W_r \cap W_s \neq \emptyset$ define $(\sigma^* \omega)_{r,s}(x) = \omega_{\sigma(r), \sigma(s)} / W_r \cap W_s$ and $(\sigma'^* \omega)_{r,s} = \omega'_{\sigma'(r), \sigma'(s)} / W_r \cap W_s$. So $(\sigma^* \omega)_{r,s}(x) = \eta_r(x) \cdot \omega'_{\sigma'(r), \sigma'(s)}(x) \cdot \eta_s^{-1}(x)$, $x \in W_r \cap W_s$, $\eta_r(x) \cdot f = \text{pr}_2 \circ \tau_{\sigma(r)} \circ \tau_{\sigma'(r)}^{-1}(x, f)$, $f \in F$ ($\eta_r(x) \in G$ is well defined because G acts effectively on F).

Lemma 2. Let $E, E' \in SP(M, F, G)$ and $[\omega], [\omega'] \in H^1(M, G_p)$ respectively their 1-cocycles. If E and E' are isomorphic, then $[\omega] = [\omega']$.

Proof. Let $h : E \rightarrow E'$ be an isomorphism in $SP(M, F, G)$. Then we can find preringed atlases $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ and $\{(U'_j, \tau'_j)\}_{j \in J}$ respectively of E and E' such that $\tau'_j \circ h \circ \tau_i^{-1}(x, f) = (x, \zeta_i(x) \cdot f)$, $x \in U_i$, $f \in F$, $\zeta_i : U_i \rightarrow G$ being the local map. For $x \in U_i \cap U_j$ we have $\tau'_j \circ h \circ \tau_i^{-1}(x, f) = (x, (\omega'_{ij}(x) \cdot \zeta_i(x) \cdot \omega_{ij}(x)) \cdot f)$, $f \in F$. The action of G is effective, so $\omega'_{ij} = \zeta_j \omega_{ij} \zeta_i^{-1}$, thus $[\omega] = [\omega']$.

If $[SP(M, F, G)]$ represents the set of isomorphism classes, then we have the map $T_M : [SP(M, F, G)] \rightarrow H^1(M, F, G)$, $T_M([E]) = [\omega]$, $E \in SP(M, F, G)$ with the 1-cocycle ω .

Theorem. T is an isomorphism functorial $[SP(\cdot, F, G)] \rightarrow H^1(\cdot, G_p)$.

Proof. Let $h : M' \rightarrow M$ be a morphism of preringed manifolds. Then $h^\# \circ T_M = T_{M'} \circ h^*$ where $h^* = [SP(h, F, G)]$ and $h^\# = H^1(h, G_p)$. In fact if $[E] \in [SP(M, F, G)]$, $T_M([E]) = [\omega] \in H^1(M, G_p)$, $\omega \in H^1(\mathcal{U}, G_p)$ for $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Let $\mathcal{U}' = \{h^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ and $\omega' \in H^1(\mathcal{U}', G_p)$, $\omega'_{ij} = \omega_{ij} \circ h$. By Proposition 5, $T_{M'}([h^*E]) = [\omega'] = h^*[\omega]$. It remains to prove that for any M , $T_M : SP(M, F, G) \rightarrow H^1(M, G_p)$ is bijective. If $E, E' \in SP(M, F, G)$, $T_M([E]) = [\omega]$, $T_M([E']) = [\omega']$ and $[\omega] = [\omega'] \in H^1(M, G_p)$, then there are $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ and $\{(U'_i, \tau'_i)\}_{i \in I}$ atlases for E and E' respectively such that $\omega \in H^1(\mathcal{U}, G_p)$, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ and for $i \in I$ there is the morphism of preringed manifolds $\zeta_i : U_i \rightarrow G$ with $\omega'_{ij} = \zeta_j \omega_{ij} \zeta_i^{-1}$ in $U_i \cap U_j$, $i, j \in I$. Define $h : E \rightarrow E'$, $h(\tau_i^{-1}(x, f)) = \tau'_i^{-1}(x, \zeta_i(x) \cdot f)$, $x \in U_i$, $f \in F$. h is a morphism of preringed bundles and by Proposition 5 h is an isomorphism in $SP(E, F, G)$. Then T_M is injective.

Let $[\omega] \in H^1(M, G_p)$, $\omega \in H^1(\mathcal{U}, G_p)$, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. In the disjoint union $\bigvee_{i \in I} (U_i \times F)$ we define the equivalence relation $(x_i, f_i) \sim (x_j, f_j) \Leftrightarrow x_i = x_j$ and $\omega_{ij}(x_i) \cdot f_i = f_j$, $x_i \in U_i$, $x_j \in U_j$, $f_i, f_j \in F$. If $E =$

$= (\bigvee_{i \in I} (U_i \times F)) / \sim$ and $\Pi: E \rightarrow M$ (the quotient map), then $(E, \Pi, M, F, G) \in SP(M, F, G)$. In fact, for $i \in I$, the map $\sigma_i: U_i \times F \rightarrow \Pi^{-1}(U_i)$ $\sigma_i(x, f) = [x, f]$ ($[x, f]$ is the $\sim$ -equivalence class) is bijective. Thus $\{(U_i, \sigma_i^{-1})\}_{i \in I}$ is a preringed bundle atlas. We have $\sigma_i^{-1} \circ \sigma_j(x, f) = \sigma_i^{-1}[x, f] = (x, \omega_{ij}(x) \cdot f)$, $x \in U_i \cap U_j$, $f \in F$. Obviously $T_M([E]) = [\omega]$, so T_M is also surjective.

Remark. The previous theorem classifies only the preringed bundles but this classification is finer than that of [7], p. 103 (there are preringed bundles isomorphic as locally trivial bundles with structure group, but non isomorphic as preringed bundles).

Received May 15, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Gunning C. R., Rossi H., *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Hirzebruch F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New-York, 1965.
3. Кац М. П., Курато А., Достаточное условие дифференцируемости векторно-значимых функций. Вест. Московского университета, 4 (1976).
4. Lang S., *Introduction to Differentiable Manifolds*. Interscience, New-York, 1962.
5. Miron R., Pop I., *Topologie Algebrică. Omologie. Omotopie. Spații de acoperire*. Ed. Acad. R.S.R., Buc., 1974.
6. Sikorski R., *Differential Modules*. Colloq. Math., XXIV (1971—72).
7. Vaisman I., *Cohomology and Differential Forms*. Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New-York, 1973.

VARIETĂȚI ȘI FIBRATE PREINELATE CU STRUCTURĂ DE GRUP

(Rezumat)

În această lucrare se introduce conceptul de varietate preinelată care în esență este o structură local determinată de un triplet $(E, \mathcal{F}, V)$ unde E este un spațiu topologic, $\mathcal{F}$ este un prefascicul de funcții continue pe E și V este un spațiu Banach, aceste triplete fiind local compatibile.

Folosind această nouă noțiune urmează să se studieze prin mijloacele geometriei diferențiale diferite spații care nu sînt în general varietăți diferențiabile, de exemplu varietățile topologice. Autorul concepe teoria varietăților preinelate și ca o teorie de unificare a diferitelor generalizări ale varietăților diferențiabile.

Se studiază de asemenea conceptul de fibrat preinelat și se demonstrează o teoremă de clasificare a fibratelor preinelate.

FUZZY OBJECTS IN TOPOI : A GENERALIZATION OF FUZZY SETS

BY

C. V. NEGOIȚĂ and C. AL. ȘTEFĂNESCU

1. Introduction. The theory of fuzzy systems turned out to be a very simple and convenient apparatus for quite a variety of problems. The language of fuzzy sets is natural for those situations dealing with vague concepts. For a long time, the basic difficulty was to translate these concepts into precise mathematical statements. When we pass from a vague concept to a precisely formulated one we speak about an explication of the former. Thus, the mathematical notion of „Fuzzy Sets“ is an explication of such an ordinary notion as „concepts“ [1].

There are severe limitations of our ability to work with fuzzy sets. One difficulty in constructing a theory of fuzzy sets is the lack of a proper tool, and the need to use the theory of crisp sets in order to define fuzzy sets. According to the theory of representation [2], [3] a fuzzy set is viewed as a family of crisp sets. Such a representation was applied in fuzzy programming and some results are reported in [4].

But in spite of these, the algebraic aspects of the theory of representation have received almost no systematic treatment. This paper is an attempt to show that the fuzzy set and its representation with a family of crisp sets can be better generalized in the special framework of topoi. In this way, we can reconsider all known algebraic or topological structures.

2. Topoi. A category E is an elementary topos if and only if it satisfies the following conditions [5]:

- 1) E has finite limits;
- 2) E is cartesian closed;
- 3) E has a subobject classifier.

Condition 1) says that E has a terminal object 1 , such that for any object X there is exactly one morphism $X \rightarrow 1$, and it has also pullbacks.

Condition 2) says that we can define an exponential, and that for any object D , there is a natural isomorphism

$$\text{Hom}(D \times A, B) = \text{Hom}(D, B^A).$$

In other words, to every morphism $f: D \times A \rightarrow B$ in E there is a unique morphism $g: D \rightarrow B^A$ in E such that the following diagram commutes ($e(g \times 1) = f$),

$$\begin{array}{ccc}
 B^A \times A & \xrightarrow{e} & B \\
 \sigma \times 1 \uparrow & \nearrow f & \\
 D \times D & &
 \end{array}$$

where e is called evaluation.

Condition 3) says that in the category E there is an object Ω and a morphism $1 \rightarrow \Omega$ from the terminal object such that to every monomorphism $m: A \rightarrow X$, i.e., to every subobject of X , there exist exactly one morphism $\varphi: X \rightarrow \Omega$ such that

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & \Omega
 \end{array}$$

is a pullback diagram.

3. Fuzzy Objects. It is easy to show that if Ω is an object in an elementary topos E , we can construct a new topos E/Ω whose objects are the arrows $X \rightarrow \Omega$ and whose morphisms $f: \varphi \rightarrow \varphi'$ can be defined as $X \xrightarrow{f} X'$ with $\varphi' \circ f = \varphi$ [6].

Let us consider the diagrams

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \\
 \searrow 1_x & & \\
 & X &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X \times \Omega & \xrightarrow{\quad} & \Omega
 \end{array}$$

Given the monomorphism $(\varphi, 1_x): X \rightarrow \Omega \times X$, then $\Phi_{(\varphi, 1_x)} = \Omega \times X \rightarrow \Omega$ is the characteristic function of X through $(\varphi, 1_x)$ and according to condition (2) we have $\tilde{\varphi}: \Omega \rightarrow \Omega^x$.

In this way the set of all fuzzy sets defined on the carrier X was generalized to the object Ω^x in the topos E . We shall note that $\tilde{\varphi} \cdot 0 = \emptyset$ where 0 is the morphism false: $1 \rightarrow \Omega$. This morphism is minimal in $\text{Hom}(1, \Omega)$ which is a lattice (Heyting algebra), and $\emptyset$ is the minimal subobject in Ω^x . Since Ω is the subobject classifier, the elements of X correspond exactly to the subobjects of X which form a lattice. In other words, $\emptyset$ is the minimal subobject of $\text{Hom}(X, \Omega)$.

So far we have established that $\varphi: X \rightarrow \Omega$ can be viewed as a point in Ω^x .

We shall note also that according to our hypotheses the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \\
 \tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} \\
 \Omega^x \times \Omega^x & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^x
 \end{array}$$

and $\tilde{\varphi} \circ t: 1 \rightarrow \Omega^x$ where $t: 1 \rightarrow \Omega$ means true, being maximal in $\text{Hom}(1, \Omega)$. Now we shall denote the morphisms $\tilde{\varphi}$ by $\text{ob}F1_E$. The map of objects from E/Ω into $F1_E$ is injective: if we consider two objects $\varphi: X \rightarrow \Omega$ and $\varphi': X' \rightarrow \Omega$ with $X \neq X'$ then $(\varphi, 1_x) \neq (\varphi', 1_x)$ and $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\varphi}'$. Note that $\tilde{\varphi}$ is a homomorphism of monoids and that $\tilde{\varphi}(\alpha)$ is the α -model of φ , a level of explication.

Consider $\text{ob}F1_E$ the class of $F: \Omega \rightarrow \Omega^x$ such that

a) $F \circ 0 = \emptyset$,

b) $F \circ \wedge = \wedge (F \times F)$,

c) $p_\Omega \circ j_{RF} = F \circ t$ and $p_X \circ j_{RF} = \text{id}_X$ (identity),

where $p_\Omega: \Omega \times X \rightarrow \Omega$ and $j_{RF}: R_F \rightarrow \Omega \times X$ is the subobject defined by $\bar{F}: \Omega \times X \rightarrow \Omega$ the morphism izomorphic with F . Then, there exist a unique $\varphi: X \rightarrow \Omega$ such that $\tilde{\varphi} = F$.

If we consider two objects $F: \Omega \rightarrow \Omega^x$ and $F': \Omega \rightarrow \Omega^{x'}$ having properties a), b), c), then $F \rightarrow F'$ will be a morphism $\alpha: \Omega^x \rightarrow \Omega^{x'}$ such that there exist a unique $f: X' \rightarrow X$ with $\alpha = \Omega^f$. In this way we have defined the category $F1_E$.

The contravariant functor $\sim: E/\Omega \rightarrow F1_E$ is an assignment of an object $\tilde{\varphi}: \Omega \rightarrow \Omega^x$ to each object $\varphi: X \rightarrow \Omega$ and of an morphism $\alpha: \tilde{\varphi}' \rightarrow \tilde{\varphi}$ to each morphism $f: \varphi \rightarrow \varphi'$. This functor has an inverse $T: F1_E \rightarrow E/\Omega$ defined as $T(F) = F \circ t$ where Ft is from $\text{Hom}(1, \Omega^x) \cong \text{Hom}(X \times 1, \Omega) \cong \text{Hom}(X, \Omega)$. If $F \xrightarrow{\alpha} F'$ is a morphism $\Omega^x \rightarrow \Omega^{x'}$ then according to the definition of α there is a unique $f: X' \rightarrow X$. Since T and $\sim$ define an isomorphism of categories between $F1_E$ and $E/$, then $F1_E$ is a topos.

4. Comments. We say that the objects in $F1_E$ are nuances or interpretations in E .

The idea of representing a fuzzy set by a family of crisp sets was generalized in the framework of the theory of elementary topoi and, in this way, to study a fuzzy object means to study Heyting algebras and their homomorphisms. One can apply the results from the theory of elementary topoi and thus the theory of fuzzy sets can be developed in a natural manner, not by simplistic „fuzzification“ of classical theories.

Received May 21, 1978

Institute of Management and
Informatics, Bucharest

REFERENCES

1. Goguen J. A., *Concept Representation in Natural and Artificial Languages: Axioms, Extensions and Applications for Fuzzy Sets*. Int. J. Man-Machine Studies, **6**, 513 (1974).
2. Negoitǎ C. V., Ralescu D. A., *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1975.
3. Negoitǎ C. V., Ralescu D. A., *Some Results in Fuzzy System Theory*. In Rose J., Bilciu C., (Eds), *Modern Trends in Cybernetics and Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1977.
4. Negoitǎ C. V., Flondor P., Sularia M., *On Fuzzy Environment in Optimization Problems*. In Rose J., Bilciu C., (Eds), *Modern Trends in Cybernetics and Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1977.

5. Schlomiuk D. I., *Logique des Topos*. Les Presses de l'Université, Montréal, 1977.
6. Wrieth G. C., *Lectures on Elementary Topoi*. In Lawvere F. W., Maurer A., *Model Theory and Topoi*, Springer Verlag, Berlin, 1975.

OBIECTE FUZZY ÎN TOPOSURI: O GENERALIZARE A MULȚIMILOR FUZZY

(Rezumat)

Se generalizează ideea de reprezentare a unei mulțimi fuzzy printr-o familie de mulțimi ordinare, în cazul toposurilor (categorii cu limite finite, cartezian închise, cu obiect de clasificare). Se arată că a studia un obiect fuzzy înseamnă practic a studia algebrele Heyting și homomorfismele lor. În felul acesta se pot aplica rezultate din teoria toposurilor care surprind aproape toate faptele ce se întâmplă în Ens (categoria mulțimilor ordinare) și teoria mulțimilor fuzzy nu se mai face „fuzzificind” teoria clasică, ci rezultă în mod natural.

FRACTIONAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS

BY

K. B. OLDHAM and J. SPANIER

1. Introduction. The fractional calculus is that branch of mathematics which unifies differentiation and integration by attaching meaning to operators such as $d^{1/2}/dt^{1/2}$ and $d^{-\sqrt{2}}/dt^{-\sqrt{2}}$. In other words, this subject deals with the family of operators d^q/dt^q where q is *any* number. For example, when $q = 1$ one has the familiar differential operator d/dt , while $q = -1$ corresponds to ordinary indefinite integration. Among the non-integers, the cases $q = 1/2$ and $q = -1/2$ seem to arise most frequently; examples will be found in Section 4.

In the next section, we shall briefly review the history of the fractional calculus and see that the subject is almost as old as the classical calculus. Section 3 discusses definitions of fractional derivatives and integrals, and some of their general properties. Some important applications involving diffusion or similar processes will be emphasized in Section 4.

2. History. Evidently it was Leibniz [1], in a letter to L'Hospital dated 1695, who first speculated about fractional derivatives. Forty years after this, Euler [2] was able to fractionally differentiate powers, a procedure which also led him to invent the gamma function, $\Gamma(z)$. Liouville's approach, described in a series of memoirs [3] a century later, was motivated by a desire to generalize repeated integration.

De Morgan [4] and Center [5] both realized that the Euler and Liouville definitions were in conflict. It became clear only towards the end of the nineteenth century that the disparity between the Euler and Liouville systems reflects different choices of a lower limit [6].

Perhaps the most noteworthy recent advances in the fractional calculus have been in its application to various problems [7]. Many branches of mathematics and science have already been influenced by this powerful tool and we believe many more applications are yet to be discovered.

3. Definitions and General Properties. Though a definition attributed to Grünwald [7], [8] is more fundamental and others based on contour integration may be more powerful [9], a commonly encountered formula for generalized integration is

$$\frac{d^q}{[d(t-c)]^q} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_c^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{q+1}}, \quad q < 0.$$

When q is a negative integer this formula may be shown to produce an expression for an iterated integral of f with repeated lower limit c [7]. The extension to generalized differentiation makes use of

$$\frac{d^q}{[d(t-c)]^q} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{d^{q-n}}{[d(t-c)]^{q-n}} f(t),$$

where n is an integer greater than q . As expected, the operator $d^q/[d(t-c)]^q$ can be demonstrated to be independent of the lower limit c , being simply d^q/dt^q , when q is a non-negative integer [7]. The choice $c=0$ leads to the so-called Riemann-Liouville definition, valid for q of either sign. For example, the Riemann-Liouville semiintegral and semiderivative would appear as

$$\frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} f(t) \equiv \frac{d^{-1/2}}{[d(t-0)]^{-1/2}} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}$$

and

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f(t) \equiv \frac{d^{1/2}}{[d(t-0)]^{1/2}} f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \right\}.$$

Generally, those familiar properties which apply both to differentiation and integration can be carried over from the classical calculus to the fractional calculus. Thus the rule

$$\frac{d^q}{dt^q} \sum_{j=1}^N a_j f_j(t) = \sum_{j=1}^N a_j \frac{d^q}{dt^q} f_j(t)$$

applies¹⁾, whereas the chain rule for differentiation,

$$\frac{d}{dt} g(f(t)) = \frac{d}{df} g(f) \frac{d}{dt} f(t)$$

has no simple counterpart.

Leibniz's rule is general in the classical calculus, though it is usually called „the product rule“ when applied to differentiation and „integration by parts“ when applied to integration. There are several forms in which this rule may be generalized into the fractional calculus [10]. One of these is

$$\frac{d^q}{dt^q} [f(t) g(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} \frac{d^j}{dt^j} f(t) \frac{d^{q-j}}{dt^{q-j}} g(t),$$

where the generalized binomial coefficient $\binom{q}{j}$ is defined as $\Gamma(q+1)/[\Gamma(q-j+1)\Gamma(j+1)]$. This formula is particularly useful when either of the functions is a polynomial, for then the sum is finite.

¹⁾ Even when $N = \infty$ [7].

One of the most useful properties in the fractional calculus is the so-called „composition rule“, which describes the effect applying fractional operators successively. The rule may be written

$$\frac{d^q}{dt^q} \frac{d^Q}{dt^Q} f(t) = \frac{d^{q+Q}}{dt^{q+Q}} f(t) + \text{correction term},$$

where the „correction term“ is often zero. The general formulation for arbitrary q , Q and f is complicated [7], [9], but provided that $Q \leq 1$ and $f(0) = 0$, the correction term is necessarily zero, a result which finds frequent application.

The behavior of fractional derivatives and integrals under Laplace transformation has proved useful in studying problems involving partial differential equations. The general result is

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^q}{dt^q} f(t) \right\} = s^q \mathcal{L} \{ f(t) \} - \sum_{j=1}^n s^{j-1} \frac{d^{q-j}}{dt^{q-j}} f(0),$$

where n is the integer such that $n - 1 < q \leq n$ [7].

4. Applications. Not only has mathematics been enriched by generalizing derivatives and integrals, many problems in the physical sciences have also been expressed and solved succinctly by recourse to the fractional calculus. Some areas of application are air pollution modeling [11], electromagnetic theory [12], heat conduction [13], transmission lines [14], elasticity [15], electrochemistry [16], rheology [17], chemical physics [18], circuit theory [19], hydrology [20], gravitational theory [21], radio astronomy [22], viscoelasticity [23], analysis of random processes [24], mathematical physics [25] and metallurgy [26].

Many of these applications involve diffusion. In the simplest case, such processes are described by the partial differential equations

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t),$$

in which F represents an intensive scalar variable (such as concentration, temperature, vorticity, electric potential and the like), J its flux, x the spatial coordinate, t the time and k a constant characteristic of the medium and the type of transport. These two differential equations must be augmented by appropriate boundary and initial conditions if a unique solution $F(x, t)$ is sought.

Often, however, the principal interest lies not in the general form of $F(x, t)$ but in the relationship between the values of F and J at one of the boundaries; at $x = 0$ say. The fractional calculus provides just such a relationship without the need to specify the boundary condition at $x = 0$. In other words, this approach describes not one, but an entire class of boundary value problems. It is our purpose now to outline such a development for the case²⁾ when $F(x, 0) = 0$.

²⁾ For the more general case of an arbitrary preexisting equilibrium, that is $F(x, 0) = \text{any constant}$, one need only replace $F(x, t)$ by $F(x, t) - F(x, 0)$.

Notice that the last equation may be rearranged and formally factored

$$0 = \left\{ k \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right\} F(x, t) = \\ = \left\{ \sqrt{k} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \right\} \left\{ \sqrt{k} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \right\} F(x, t).$$

This factored form asserts that if $F(x, t)$ is first operated upon by $\{\sqrt{k}(\partial/\partial x) + \partial^{1/2}/\partial t^{1/2}\}$, followed by $\{\sqrt{k}(\partial/\partial x) - \partial^{1/2}/\partial t^{1/2}\}$, then zero is obtained. The surprising fact is that, provided only that $F(\infty, t) = F(x, 0)$, then the first of these two operations alone converts $F(x, t)$ into zero [7], [27]. That is, the semidifferential equation

$$\sqrt{k} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = - \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} F(x, t)$$

is valid whenever the transport medium is initially uniform³⁾ throughout $0 \leq x < \infty$.

Since the flux $J(x, t)$ is equal to $-k\partial F(x, t)/\partial x$, the preceding equation becomes

$$J(0, t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} F(0, t)$$

after specialization to $x = 0$. We have thus attained our goal of interrelating the boundary flux and the values of F at the boundary. For an example of the use of this equation suppose that $F(0, t) = At$; then, since the semiderivative of t is $2\sqrt{t/\pi}$, $J(0, t) = 2A\sqrt{t/\pi k}$. Alternatively, the surface flux may be sought in terms of a measured $F(0, t)$. Such was the case in Meyer's wind tunnel experiments [13] in which the heat flux at the surface of an airfoil was determined by semidifferentiating the surface temperature.

If $J(0, t)$ is prescribed, rather than $F(0, t)$, then the equation

$$F(0, t) = \sqrt{k} \frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} J(0, t),$$

found by semiintegration of the preceding equation, is more convenient. An illustration of this case is provided by considering $J(0, t) = \exp(Bt)$ which produces $F(0, t) = \sqrt{k/B} \exp(Bt) \operatorname{erf}(\sqrt{Bt})$. In electrochemical experiments [16], the surface flux of some electrogenerated substance is proportional to the electrolysis current and the surface concentration of this substance may then be found by semiintegration of the current.

Two of the examples discussed above made use of standard results of the fractional operations. Tables of the semiderivatives and semiintegrals of many familiar functions may be found in Chapter 7 of Reference [7].

³⁾ When the initial value of F is non-zero, the appropriate equation is $\sqrt{k} \partial F(x, t) / \partial x = F(x, 0) / \sqrt{\pi t} - \partial^{1/2} F(x, t) / \partial t^{1/2}$.

While we have described here only the simplest instances of the use of the semicalculus, other more complicated diffusion situations may also be treated. Thus, non-planar geometries [28] and finite media [11], [29] are tractable and also profit from the approach espoused here.

Received July 26, 1977

Trent University, Peterborough, Canada
and
Claremont Graduate School, California, USA

REFERENCES

1. Leibniz G. W., *Leibnizen Mathematische Schriften*. T. 2, Olms Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, p. 301.
2. Euler L., *Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae*, 5, 38 (1733).
3. Liouville J., *J. Ecole Polytech.*, 13, 1, (1832); 13, 71 (1832); 13, 163 (1832); 15, 17, (1835); *J. Reine Angew. Math.*, 11, 1 (1834); 12, 273 (1834); 13, 2 (1835).
4. De Morgan A., *The Differential and Integral Calculus... Geometry and Mechanics*. Baldwin and Cradock, London, England, 1842.
5. Center W., *Cambridge and Dublin Math. J.*, 3, 163 (1848); 3, 274 (1848); 4, 21 (1849); 5, 206 (1850).
6. Ross B., *Fractional Calculus and Its Applications*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1975; see also [7], p. 3.
7. Oldham K. B., Spanier J., *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, USA, 1974.
8. Grünwald A. K., *Z. Math. Phys.*, 12, 441 (1867).
9. Lavoie J. L., Tremblay R., Osler T. J., in [6] p. 323.
10. Osler T. J., *SIAM J. Appl. Math.*, 18, 658 (1970); *Amer. Math. Monthly*, 78, 645 (1971); *SIAM J. Math. Anal.*, 3, 1 (1972); *Math. Comp.*, 26, 903 (1972).
11. Spanier J., *SIAM Rev.*, in press (1977).
12. Heaviside O., *Electromagnetic Theory*. T. 2, Benn, London, England, 1920.
13. Meyer R. F., *Aeronautical Report LR-297*. Nat. Res. Council, Ottawa, Canada, 1960.
14. Oldham K. B., *Anal. Chem.*, 45, 39 (1973).
15. Gemant A., *Physics* (New York), 7, 311 (1936).
16. Belavin V. A., Nigmatullin R. Sh., Miroshnikov A. I., Lutskaya N. K., *Trudy Kazan. Aviacion Inst.*, 5, 144 (1964). Oldham K. B., *Anal. Chem.*, 41, 1904 (1969); 44, 196 (1972); *J. Electroanal. Chem.*, 72, 371 (1976). Grenness M., Oldham K. B., *Anal. Chem.*, 44, 1121 (1972). Fowler J. K., Oldham K. B., in *Chemistry and Physics of Aqueous Gas Solutions* (eds W. A. Adams et al), Electrochemical Society Publications, Princeton, USA, 1975, p. 290. Goto M., Oldham K. B., *Anal. Chem.* 45, 2043 (1973); 46, 1522 (1974). Whitsun P. E., Van den Born H. W., Evans D. H., *Anal. Chem.*, 46, 643 (1974). Imbeaux J. C., Saveant J. M., *J. Electroanal. Chem.*, 28, 325 (1970); 31, 183 (1971); 44, 169 (1973). Rodgers R. S., *Anal. Chem.*, 47, 281 (1975).
17. Scott Blair G. W., *J. Colloid Sci.*, 2, 21 (1974); *British J. Philos. Sci.*, 1, 230 (1950); with Caffyn J. E., *Philos. Mag.*, 40, 80 (1949); with Veinoglou B. C., Caffyn J. E., *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 187, 69 (1947). Shermorgor T. D., *Z. Prikl. Mech. i Tekhn. Fiz.*, 6, 118 (1966). Graham A., Scott Blair G. W., Withers R. F. J., *British J. Philos. Sci.*, 11, 265 (1961).
18. Somorjai R. L., Bishop D. M., *Phys. Rev. A*, 1, 1013 (1970).
19. Nagy F. L., Uraz A., Takahashi S., *Int. J. Control*, 18, 801 (1973); *Int. J. Systems Sci.*, 5, 655 (1974).
20. Mandelbrot B. B., Wallis J. R., *Water Resources Res.*, 4, 909 (1968).
21. Davis H. T., *The Theory of Linear Operators*. The Principia Press, Bloomington, USA, 1936.

22. Bracewell R. N., Thompson A. R., *Astrophys. J.*, **182**, 77 (1973); Tichenor D., Bracewell R. N., *J. Opt. Soc. America*, **63**, 1620 (1973).
23. Scarpi G., *Atti. Cl. di Scienze Fisiche*, **107**, 239 (1973); *Rend. Sc. Fis. mat. enat. Accad. Naz. dei Lincei*, **52**, 570 (1972).
24. Mandelbrot B. B., Van Nes J. W., *SIAM Rev.*, **10**, 422 (1968).
25. Wheeler J. A., in Lieb E. H., Simon B., Wightman A. S., (Eds.), *Studies in Mathematical Physics*, Princeton Univ. Press, Princeton, USA, 1976, p. 351.
26. Robertson W., see [7], p. 216.
27. Oldham K. B., Spanier J., *J. Electroanal. Chem.*, **26**, 331 (1970).
28. Oldham K. B., Spanier J., *J. Math. Anal. Appl.*, **39**, 655 (1972). Oldham K. B., *J. Electroanal. Chem.*, **41**, 351 (1973).
29. Iverson T. E., Ph. D. Dissertation, Claremont Graduate School, Claremont, USA, 1975.

CALCULUL FRAȚIONAL ȘI APLICĂȚILE SALE

(Rezumat)

După o foarte scurtă schiță istorică se discută definițiile derivatelor și integralelor de ordin fracționar și unele dintre proprietățile lor generale. Se indică apoi o serie de aplicații importante care implică fenomene de difuzie și alte procese similare.

A GEOMETRICAL INTERPRETATION FOR THE HOLONOMIC PROLONGATIONS OF A PRINCIPAL FIBRE BUNDLE

BY

AL. NEAGU

In this paper we give a geometrical interpretation as an r -frame space for the holonomic prolongations of a principal fibre bundle.

1. Let X be a differentiable G -space. We suppose that G is a Lie group and its action on X is proper and free. We denote by X/G the orbit space and by $\pi: X \rightarrow X/G$ the canonical projection. It is well known that the space X is a principal fibre bundle over X/G with the projection π and the structure group G .

Let Ψ be the set $\{(\varphi, \sigma)\}$ where $\varphi: U \subset R^m \rightarrow X/G$ is a local diffeomorphism around $0 \in R^m$ and $\sigma: \varphi(U) \rightarrow X$ is a differentiable cross section of the bundle $\pi: X \rightarrow X/G$. Let $\tau^r X$ be the set $\{(j_0^r \varphi, j_{\varphi(0)}^r \sigma) / (\varphi, \sigma) \in \Psi\}$ where $j_0^r \varphi$ and $j_{\varphi(0)}^r \sigma$ are the r -jets of φ and σ respectively. We observe that $j_0^r \varphi \in H^r(X/G)$ and $j_{\varphi(0)}^r \sigma \in J^r X$, where $H^r(X/G)$ is the r -frame bundle of X/G and $J^r X$ is the fibre bundle of the r -jets of all local cross sections of the fibre bundle $\pi: X \rightarrow X/G$.

$\tau^r X$ is canonically identified with the fibre product $H^r(X/G) \boxtimes_{X/G} J^r X$ and this space is called the holonomic prolongation of order r of X .

Let $R^m \times G$ be the G -space with the action:

$$((u, a), g) \in (R^m \times G) \times G \rightarrow (u, a.g) \in R^m \times G.$$

Let $\bar{\Psi}: R^m \times G \rightarrow R^m \times G$ be a local isomorphism. Then $\bar{\Psi}$ can be identified with (φ, σ) where $\varphi: U \subset R^m \rightarrow R^m$ is a local diffeomorphism such that $\varphi(0) = 0$ and $\sigma: \varphi(U) \subset R^m \rightarrow G$ is a differentiable map. We can put: $\bar{\Psi}(u, g) = (\varphi(u), \sigma(u).g)$, where $u \in R^m$ and $g \in G$.

Let $\bar{\Psi}$ be the set $\{(\varphi, \sigma)\}$ and let G_m^r be the set $\{j_{(0,e)}^r \bar{\Psi}\} = \{(j_0^r \varphi, j_0^r \sigma) / (\varphi, \sigma) \in \bar{\Psi}\}$. It follows that G_m^r is canonically identified with the semidirect product $L_m^r \times T_m^r G$ where L_m^r is the group of r -jets of all local diffeomorphism φ of R^m such that $\varphi(0) = 0$ and $T_m^r G$ is the group of m -velocity on G (see [3]).

The group L_m^r acts on $T_m^r G$ by:

$$(j_0^r \sigma, j_0^r \varphi) \in T_m^r G \times L_m^r \rightarrow j_0^r (\sigma \circ \varphi) \in T_m^r G.$$

The product of the elements of G_m^r is :

$$\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_1 = (\bar{y}_2, \bar{S}_2) \cdot (\bar{y}_1, \bar{S}_1) = (\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1, (\bar{S}_2 \cdot y_1) \cdot \bar{S}_1)$$

where $h_i = (y_i, \bar{S}_i) \in G_m^r$ ($i = 1, 2$) (see [3]).

$\tau^r X$ is a G_m^r -space with the action :

$$(1) \quad h \cdot \bar{h} = (y \cdot \bar{y}, S(\bar{S} \cdot \bar{y}^{-1} \cdot y^{-1})),$$

where $h = (y, S) \in \tau^r X$ and $\bar{h} = (\bar{y}, \bar{S}) \in G_m^r$.

The orbit space $\tau^r X / G_m^r$ may be identified with X/G and, since the action (1) is proper and free, it follows that $\tau^r X \rightarrow X/G$ is a principal fibre bundle.

Theorem 1. *The map*

$$h = (j_0^r \varphi, j_{\varphi(0)}^r \sigma) \in \tau^r X \rightarrow \sigma(\varphi(0)) \in X$$

induces on $\tau^r X$ a principal fibre bundle structure over X , with the structure group $L_m^r \times T_{m,e}^r G$, where $T_{m,e}^r G = \{j_0^r \sigma \in T_m^r G / \sigma(0) = e\}$.

2. Theorem 2. *The principal fibre bundle $\tau^r X \rightarrow X$ is a r -frame bundle.*

Proof. We suppose that $\dim G = p$ and $\dim X/G = m$, then $\dim X = m + p$. Let be the map :

$$j_r^0 : \bar{h} \in G_m^r \rightarrow j_r^0(h) = \bar{\sigma}(0) \in G$$

where $h = (y, \bar{S})$, $\bar{y} = j_0^r \bar{\varphi}$, $\bar{S} = j_0^r \bar{\sigma}$.

j_r^0 is a morphism of Lie groups. Indeed, if $\bar{h}_i = (y_i, \bar{S}_i) = (j_0^r \bar{\varphi}_i, j_0^r \bar{\sigma}_i) \in G_m^r$ ($i = 1, 2$) then $\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_1 = (j_0^r \bar{\varphi}_2 \cdot \bar{\varphi}_1, j_0^r((\bar{\sigma}_2 \cdot \bar{\varphi}_1) \cdot \bar{\sigma}_1))$, $j_r^0(\bar{h}_i) = \bar{\sigma}_i(0)$, $j_r^0(\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_1) = ((\bar{\sigma}_2 \cdot \bar{\varphi}_1) \cdot \bar{\sigma}_1)(0) = (\bar{\sigma}_2 \cdot \bar{\varphi}_1)(0) \cdot \bar{\sigma}_1(0) = \bar{\sigma}_2(0) \cdot \bar{\sigma}_1(0) = j_r^0(\bar{h}_2) \cdot j_r^0(\bar{h}_1)$.

It follows that $\text{Ker } j_r^0$ contains all elements $\bar{h} = (j_0^r \bar{\varphi}, j_0^r \bar{\sigma}) \in G_m^r$ with the property $\sigma(0) = e$ and hence $\text{Ker } j_r^0 = L_m^r \times T_{m,e}^r G$.

Let be the sets $\{j_0^r \bar{\sigma} / \bar{\sigma} : R^m \rightarrow G, \sigma(u) = g, \forall u \in R^m\}$ and $\{j_0^r \bar{\sigma} / \bar{\sigma} : R^m \rightarrow G, \sigma(0) = e\}$ then we may identify the first set with the group G and the second set with $T_{m,e}^r G$. It results easy that $T_m^r G$ is identified with the semi-direct product $G \cdot T_{m,e}^r G$.

The group $L_m^r \times T_{m,e}^r G$ may be identified with a subgroup of L_{m+p}^r . Indeed, if V is a neighbourhood of $e \in G$ then we can identify V with an open neighbourhood $V' \subset R^p$ such that $0 \in V'$. Since $\bar{h} = (j_0^r \bar{\varphi}, j_0^r \bar{\sigma}) = j_{(0,e)}^r \bar{\Psi}$ contains the r -jet in $(0,0)$ of the restriction of $\bar{\Psi}$ to $U \times V' \subset R^m \times R^p$ and this restriction is a diffeomorphism such that $\bar{\Psi}(0,0) = (0,0)$ it results that $\bar{h} \in L_{m+p}^r$.

Let $h = (y, S) = (j_0^r \varphi, j_{\varphi(0)}^r \sigma) = j_{(0,e)}^r \Psi$ where $\Psi : R^m \times G \rightarrow X$ is defined by

$$\Psi(u, H \cdot g) = \sigma(\varphi(u)) \cdot g$$

and Ψ is a diffeomorphism around $(0, e)$. It results that h contains the r -jet in $(0,0)$ of the restriction of Ψ to $U \times V' \subset R^m \times R^p$, and hence h is a frame of order r on X . We obtain the inclusion $\tau^r X \subset H^r(X)$.

Let $j_1^r: H^r(X) \rightarrow X$ be the map $j_1^r(j_0^r f) = f(0)$, where $f: R^{m+p} \rightarrow X$ is a local diffeomorphism around $0 \in R^{m+p}$. Let x be a point of X , then here exists $\Psi = (\varphi, \sigma): R^m \times G \rightarrow X$ such that $\Psi(0, e) = \sigma(\varphi(0)) = \sigma(0) = x$. It follows that $j_1^r(\tau^r X) = X$.

Let $h \in \tau^r X$ and $\bar{h} \in {}^0G_m^r = L_m^r \times T_{m,e}^r G$ (hence $\sigma(0) = e$). We obtain

$$j_1^r(h \cdot h) = j_1^r(y \cdot y, S \cdot (\bar{S} \cdot \bar{y}^{-1} \cdot y^{-1})) = \sigma(0). \bar{\sigma}(0) = \sigma(0)$$

and hence $(j_1^r)^{-1}(x) = h^0 \cdot G_m^r$.

The existence of the local cross sections is evidently.

By a theorem of [1] it follows that $\tau^r X \rightarrow X$ is a subbundle of $H^r(X) \rightarrow X$.

Received August 26, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Bernard D., *Sur la géométrie différentielle des G-structures*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **10**, 151—270 (1960).
2. Bredon G. E., *Introduction to Compact Transformation Groups*. Accad. Press, New-York — London, 1972.
3. Kolar I., *Canonical Forms on the Prolongations of Principal Fibre Bundles*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **16**, 1091 — 1106 (1971).
4. Neagu Al., *Prolongations of G-spaces* (to appear).
5. Neagu Al., *Theoretical Aspects in the Moving Frames Method* (to appear).

O INTERPRETARE GEOMETRICĂ PENTRU PRELUNGIRILE OLONOME ALE UNUI SPAȚIU FIBRAT PRINCIPAL

(Rezumat)

În această Notă dăm o interpretare geometrică pentru prelungirile olonome ale unui spațiu fibrat principal. Prelungirea de ordin r a unui astfel de spațiu poate fi privită ca o G -structură de ordinul r peste spațiul total al fibratului principal.

CONNECTIONS AND ALMOST-PRODUCT STRUCTURE

BY

ELENA VAMANU

1. Introduction. A structure on an n -dimensional differentiable manifold given by a tensor field F_j^i satisfying $F_h^i \cdot F_j^h = \delta_j^i$, where δ_j^i is the unit tensor field, is called an almost-product structure. A connection in which F_j^i is covariant constant is called an F -connection. In the present paper we shall determine some of the F -connections and we study certain of their properties.

2. F -connections. Let M be an n -dimensional differentiable manifold of class C^∞ with an almost-product structure given by tensor field F_j^i . According to M. Obata [1], we introduce the following operators:

$$(1) \quad Q_{mh}^{ki} = \frac{1}{2} (\delta_m^k \delta_h^i + F_m^k F_h^i), \quad Q_{mh}^{*ki} = \frac{1}{2} (\delta_m^k \delta_h^i - F_m^k F_h^i).$$

These operators operate on a general tensor T according to:

$$(2) \quad QT: \quad Q_{mh}^{ki} T^{...h...}, \quad Q^*T: \quad Q_{mh}^{*ki} T^{...h...}$$

and they satisfy

$$Q + Q^* = I, \quad Q \cdot Q^* = Q^*Q = 0, \quad Q \cdot Q = Q, \quad Q^* \cdot Q^* = Q^*$$

(I denoting the identity).

An equation

$$(3) \quad Q^* \cdot X = V$$

in the unknown tensor X has a solution if and only if

$$(4) \quad Q \cdot V = 0.$$

The general solution of the equation (3) is given by

$$(5) \quad X = V + W$$

where, X , V , W are tensors of the same type and the arbitrary tensor W must satisfy the condition [3]

$$(6) \quad QW = W.$$

Let γ_{jk}^i be an arbitrary but fixed connection in the manifold M , and ∇_j the operator of covariant differentiation with respect to γ_{jk}^i .

Theorem. *A necessary and sufficient condition that a connection Γ_{jk}^i in the manifold M be an F -connection is that Γ_{jk}^i can be written in the form*

$$(7) \quad \Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \frac{1}{2} F_j^m \nabla_k F_m^i + W_{jk}^i,$$

where W_{jk}^i is an arbitrary tensor meeting the condition

$$(8) \quad Q_{mh}^{ki} W_{kj}^h = W_{mj}^i.$$

Proof. For the given connection γ_{jk}^i , another connection Γ_{jk}^i is given by

$$(9) \quad \Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i + X_{jk}^i,$$

where X_{jk}^i is a tensor. We denote by D_j the operator of covariant differentiation with respect to Γ_{jk}^i . We then have

$$(10) \quad D_j F_k^i = \nabla_j F_k^i + X_{hj}^i F_k^h - X_{kj}^h F_h^i = 0.$$

In order that $D_j F_k^i = 0$, it is necessary and sufficient that we have

$$\nabla_j F_k^i + X_{hj}^i F_k^h - X_{kj}^h F_h^i = 0$$

which is equivalent to

$$(11) \quad Q_{mh}^{ki} X_{kj}^h = -\frac{1}{2} F_m^k \nabla_j F_k^i.$$

If we put

$$(12) \quad V_{mj}^i = -\frac{1}{2} F_m^k \nabla_j F_k^i$$

then (11) can be written as

$$(13) \quad Q_{mj}^{ki} X_{kj}^h = V_{mj}^i.$$

The tensor V_{mj}^i satisfies the condition

$$(14) \quad Q_{mh}^{ki} V_{kj}^h = 0.$$

The general solution of the equation is given by

$$(15) \quad X_{jk}^i = V_{jk}^i + W_{jk}^i = \frac{1}{2} F_j^m \nabla_k F_m^i + W_{jk}^i,$$

where the arbitrary tensor W_{jk}^i must satisfy the condition (6), $Q \cdot W = W$.

Thus the general F -connection Γ_{jk}^i is given by

$$(16) \quad \Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \frac{1}{2} F_j^m \nabla_k F_m^i + W_{jk}^i.$$

Let us now consider the connection

$$(17) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \frac{1}{2} F_j^m \nabla_k F_m^i.$$

It may be easily seen that $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i$ is an F -connection.
From (16) and (17) we have

$$(18) \quad \Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + W_{jk}^i,$$

where the arbitrary tensor W_{jk}^i must satisfy the condition

$$(19) \quad Q \cdot W = W.$$

We give below some choices of W_{jk}^i which satisfy the condition (19):

$$(20) \quad W_{jk}^i = \delta_j^i p_k,$$

with p_k an arbitrary covector field;

$$(21) \quad W_{jk}^i = F_j^i p_k,$$

with p_k an arbitrary covector field;

$$(22) \quad W_{jk}^i = (\alpha \delta_j^i + \beta F_j^i) p_k,$$

with α, β two arbitrary constants.

Substituting these ones into (18) we obtain three general F -connections:

$$(23) \quad \Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + \delta_j^i p_k,$$

$$(24) \quad \Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + F_j^i p_k,$$

$$(25) \quad \Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + (\alpha \delta_j^i + \beta F_j^i) p_k,$$

with α, β arbitrary constants and p_k an arbitrary covector field.

3. Special G -connections. In this section we attempt to study the general F -connections defined by (23) and (24) respectively.

3.1. From (23) we have

$$(26) \quad \Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + \delta_j^i p_k.$$

We consider the transformation $\Gamma_{jk}^i \rightarrow \bar{\Gamma}_{jk}^i$ with

$$(27) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i p_k,$$

p_k being an arbitrary covector field.

It is easy to see that the set of these transformations is a group G , isomorphic to the additive group of covectors p_k .

We shall next consider the group G and we shall determine some invariants of this group.

Let $\Gamma_{jk}^i, \bar{\Gamma}_{jk}^i$ be two F -connections of type (27) and $T_{jk}^i, \bar{T}_{jk}^i$ be their torsion tensors, and $R_{jkl}^i, \bar{R}_{jkl}^i$ their curvature tensors.

In view of (27) we obtain

$$(28) \quad \bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i + \delta_j^i p_k - \delta_k^i p_j,$$

$$(29) \quad \bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + \delta_j^i (p_{k,l} - p_{l,k}).$$

By contracting i, k in (28) we have

$$(30) \quad \bar{T}_{ji}^i = T_{ji}^i + (1-n)p_j.$$

If we put

$$(31) \quad \bar{T}_j \stackrel{\text{def}}{=} T_{ji}^i, \quad T_j \stackrel{\text{def}}{=} T_{ji}^i$$

we find from (30), by use of (31),

$$(32) \quad p_j = \frac{\bar{T}_j - T_j}{1-n}.$$

Substituting (32) on the right hand side of (28) we have

$$(33) \quad \bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i + \frac{1}{1-n} \delta_j^i (\bar{T}_k - T_k) - \frac{1}{1-n} \delta_k^i (\bar{T}_j - T_j).$$

From (33) it follows that

$$(34) \quad \bar{T}_{jk}^i + \frac{1}{n-1} \delta_j^i \bar{T}_k - \frac{1}{n-1} \delta_k^i \bar{T}_j = T_{jk}^i + \frac{1}{n-1} \delta_j^i T_k - \frac{1}{n-1} \delta_k^i T_j.$$

Thus we find the first invariant tensor of the group G given by

$$(35) \quad I_{ijk}^i = T_{jk}^i + \frac{1}{n-1} (\delta_j^i T_k - \delta_k^i T_j).$$

By contracting i, j in (29) we have

$$(36) \quad \bar{R}_{ikl}^i = R_{ikl}^i + n(p_{k,l} - p_{l,k}).$$

If we put

$$(37) \quad \bar{P}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{R}_{ikl}^i, \quad P_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ikl}^i$$

it follows from (36) and (37) that

$$(38) \quad p_{k,l} - p_{l,k} = \frac{1}{n} (\bar{P}_{kl} - P_{kl}).$$

If (38) is substituted in (29) it follows

$$\bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + \frac{1}{n} \delta_j^i (\bar{P}_{kl} - P_{kl})$$

which gives

$$(39) \quad \bar{R}_{jkl}^i - \frac{1}{n} \delta_j^i \bar{P}_{kl} = R_{jkl}^i - \frac{1}{n} \delta_j^i P_{kl}.$$

We have thus obtained the second invariant tensor of the group G , given by

$$(40) \quad I_{ijkl}^i = R_{jkl}^i - \frac{1}{n} \delta_j^i P_{kl}.$$

Now if we contract i, l in (29) we have

$$(41) \quad \bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + p_{k, j} - p_{j, k}.$$

If we put

$$(42) \quad \bar{R}_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{R}_{jkl}^l, \quad R_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} R_{jkl}^l$$

it follows from (41) that

$$(43) \quad p_{k, j} - p_{j, k} = \bar{R}_{jk} - R_{jk}.$$

Substituting (43) on the right hand side of (29) we have

$$(44) \quad \bar{R}_{jkl}^i - \delta_j^i \bar{R}_{lk} = R_{jkl}^i - \delta_j^i R_{lk}.$$

We thus find the third invariant tensor of the group G given by

$$(45) \quad I_{3jkl}^i = R_{jkl}^i - \delta_j^i R_{lk}.$$

3.2. Let us now consider the transformation $\Gamma_{jk}^i \rightarrow \bar{\Gamma}_{jk}^i$ with

$$(46) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + F_j^i p_k,$$

p_k being an arbitrary covector field.

It is easy to see that the set of these transformations is a group $\bar{G}$.

Proceeding in the same way as in 3.1, we can obtain some invariant tensors of this group.

Let $T_{jk}^i, \bar{T}_{jk}^i$ be the torsion tensors, and $R_{jkl}^i, \bar{R}_{jkl}^i$ the curvature tensors with respect to $\Gamma_{jk}^i, \bar{\Gamma}_{jk}^i$ respectively.

Then we have

$$(47) \quad \bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i + F_j^i p_k - F_k^i p_j,$$

$$(48) \quad \bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + F_j^i (p_{k, l} - p_{l, k}).$$

Multiplying (47) by F_i^m we obtain

$$(49) \quad \bar{T}_{jk}^i F_i^m = T_{jk}^i F_i^m + \delta_j^m p_k - \delta_k^m p_j.$$

If we now contract m, j in (49) we get

$$(50) \quad \bar{T}_{mk}^i F_i^m = T_{mk}^i F_i^m + (n-1) p_k$$

from which it follows

$$(51) \quad p_k = \frac{1}{n-1} (\bar{T}_{mk}^i F_i^m - T_{mk}^i F_i^m).$$

Substituting (51) in (47) we have

$$(52) \quad \bar{T}_{jk}^i = T_{jk}^i + \frac{1}{n-1} F_j^i (\bar{T}_{mk}^h F_h^m - T_{mk}^h F_h^m) - \frac{1}{n-1} F_k^i (\bar{T}_{mj}^h F_h^m - T_{mj}^h F_h^m)$$

which implies that

$$(53) \quad \begin{aligned} \bar{T}_{jk}^i - \frac{1}{n-1} F_j^i F_h^m - \bar{T}_{mk}^h + \frac{1}{n-1} F_k^i F_h^m \bar{T}_{mj}^h = \\ = T_{jk}^i - \frac{1}{n-1} F_j^i F_h^m T_{mk}^h + \frac{1}{n-1} F_k^i F_h^m T_{mj}^h. \end{aligned}$$

We have thus obtained the first invariant tensor of the group $\bar{G}$ given by

$$(54) \quad J_{1jk}^i = T_{jk}^i - \frac{1}{n-1} F_j^i F_h^m T_{mk}^h + \frac{1}{n-1} F_k^i F_h^m T_{mj}^h.$$

Multiplying (48) by F_i^m , we obtain

$$(55) \quad \bar{R}_{jkl}^i F_i^m = R_{jkl}^i F_i^m + \delta_j^m (p_{k, i} - p_{l, k}).$$

If we contract m, j in (55) we have

$$(56) \quad \bar{R}_{mkl}^i F_i^m = R_{mkl}^i F_i^m + n (p_{k, i} - p_{l, k}),$$

from which we obtain

$$(57) \quad p_{k, i} - p_{l, k} = \frac{1}{n} (\bar{R}_{mkl}^i F_i^m - R_{mkl}^i F_i^m).$$

Substituting (57) on the right hand side of (48) we have

$$(58) \quad \bar{R}_{jkl}^i - \frac{1}{n} F_j^i F_h^m \bar{R}_{mkl}^h = R_{jkl}^i - \frac{1}{n} F_j^i F_h^m R_{mkl}^h.$$

We thus find the second invariant tensor of the group $\bar{G}$ given by

$$(59) \quad J_{2jkl}^i = R_{jkl}^i - \frac{1}{n} F_j^i F_h^m R_{mkl}^h.$$

Now, contracting i, l in (48) and using (42) we obtain

$$(60) \quad \bar{R}_{jk} = R_{jk} + F_j^i (p_{k, i} - p_{i, k})$$

and multiplying (60) by F_m^j , we have

$$\bar{R}_{jk} F_m^j = R_{jk} F_m^j + p_{k, m} - p_{m, k}$$

from which we obtain

$$(61) \quad p_{k, m} - p_{m, k} = \bar{R}_{jk} F_m^j - R_{jk} F_m^j.$$

Substituting (61) in (48) we have

$$(62) \quad \bar{R}_{jkl}^i - F_j^i F_l^h \bar{R}_{hk} = R_{jkl}^i - F_j^i F_l^h R_{hk}.$$

Finally, we have obtained the third invariant tensor of the group $\bar{G}$ given by

$$(63) \quad J_{3jkl}^i = R_{jkl}^i - F_j^i F_l^h R_{hk}.$$

Received June 22, 1978

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Obata M., *Affine Connections on Manifolds with Almost Complex, Quaternion or Hermitian Structure*. Japanese Jour. Math., 26, 43—77 (1956).
2. Sachi T., *Affine Connections on Differentiable Manifolds with π -structure*. The Annual Report of the Faculty of Education, University of Iwate, 29, 3, 1—8 (1969).
3. Walker A. G., *Almost Product-Structure*. Proc. Symp. Pure Math., 94—100 (1961).

CONEXIUNI ȘI STRUCTURI APROAPE PRODUS

(Rezumat)

Dată o varietate cu structură aproape produs se determină toate conexiunile în raport cu care tensorul structurii aproape produs este covariant constant. Din această mulțime de conexiuni se disting două submulțimi fiecare depinzând de un covector arbitrar. Pe fiecare din aceste submulțimi poate fi introdusă o structură de grup. Pentru fiecare din aceste grupuri se determină o serie de invarianți.

CURBURI INVARIANTE LA TRANSFORMĂRI DE CONEXIUNI FINSLER METRICE (I)

DE

I. GHINEA

În lucrările [6], [8] am determinat forma generală a conexiunilor Finsler compatibile cu o structură conform metrică și grupul transformărilor acestor conexiuni, iar în lucrările [7], [8] am găsit câteva obiecte geometrice invariante la aceste transformări.

În continuare ne propunem să determinăm și alți invarianți ai grupurilor de transformări de conexiuni Finsler conform metrice, invarianți în care să intervină tensori de curbura și de torsiune.

Să considerăm în formulele ([6], (4,5)) care dau transformările de conexiuni Finsler conform metrice, cazul când tensorii arbitrari A_j^h , $\bar{P}_{jk}^h$, $\bar{Q}_{jk}^h$ sînt nuli:

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{N}_j^h = N_j^h, \\ \bar{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \delta_j^h \omega_k - \delta_k^h \omega_j + g_{jk} g^{hm} \omega_m, \\ \bar{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \delta_j^h \lambda_k - \delta_k^h \lambda_j + g_{jk} g^{hm} \lambda_m. \end{cases}$$

În plus presupunem conexiunea $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ simetrică.

Vom considera mai întâi v -tensorul de curbura S_{jkl}^i a conexiunii Finsler conform metrice $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ ale cărui componente sînt [1], [2]:

$$(2) \quad S_{jkl}^i = \frac{\partial C_{jk}^i}{\partial y^l} - \frac{\partial C_{jl}^i}{\partial y^k} + C_{jk}^h C_{hl}^i - C_{jl}^h C_{hk}^i$$

și v -tensorul conform de curbura $\bar{S}_{jkl}^i$ a conexiunii transformate $(\bar{N}_j^h, \bar{F}_{jk}^h, \bar{C}_{jk}^h)$ de componente

$$(3) \quad \bar{S}_{jkl}^i = \frac{\partial \bar{C}_{jk}^i}{\partial y^l} - \frac{\partial \bar{C}_{jl}^i}{\partial y^k} + \bar{C}_{jk}^h \bar{C}_{hl}^i - \bar{C}_{jl}^h \bar{C}_{hk}^i$$

Dacă în (3) ținem seamă de a treia relație din (1), de (2) și de formulele

$$(4) \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^l} = \lambda_k|_l + C_{kl}^m \lambda_m,$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial y^i} (g_{jk} g^{im}) = C_{ji}^s g_{sk} g^{im} + C_{ki}^s g_{js} g^{im} - C_{si}^c g_{jk} g^{sm} - C_{si}^m g_{jk} g^{is},$$

care rezultă din expresia v -derivatei covariante și din relațiile ([6], (2.1), (2.2)), obținem

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{jkl}^i &= S_{jkl}^i - \delta_j^i (\lambda_k|_l - \lambda_l|_k) - \delta_k^i \lambda_j|_l + \delta_l^i \lambda_j|_k + g^{im} (g_{jk} \lambda_m|_l - \\ &- g_{jl} \lambda_m|_k) + \delta_l^i \lambda_j \lambda_k - \lambda_l^i g_{jk} g^{hm} \lambda_m \lambda_h + g_{jk} g^{is} \lambda_l \lambda_s - \\ &- \delta_k^i \lambda_l \lambda_j + \delta_k^i g_{jl} g^{hm} \lambda_m \lambda_h - g_{jl} g^{is} \lambda_k \lambda_s. \end{aligned}$$

Introducînd notațiile

$$(7) \quad \lambda_{kj} = \lambda_k|_j + \lambda_k \lambda_j - \frac{1}{2} g_{kj} \lambda_m \lambda^m = \lambda_k|_j + \lambda_k \lambda_j - \frac{1}{2} g_{kj} \lambda,$$

relația precedentă devine :

$$(8) \quad \bar{S}_{jkl}^i = S_{jkl}^i - \delta_j^i (\lambda_k|_l - \lambda_l|_k) - \delta_k^i \lambda_j|_l + \delta_l^i \lambda_j|_k + g^{im} (g_{jk} \lambda_m|_l - g_{jl} \lambda_m|_k).$$

În continuare, prin contracții succesive, vom elimina λ_{ki} și λ_{lk} între (8) și contracțiile sale.

Notăm

$$(9) \quad S_{ki} = S_{ikl}^i, \quad S_{jl} = S_{jil}^i, \quad S_{jk} = S_{jki}^i, \quad S = g^{ki} S_{ki}, \quad S = g^{il} S_{jl}, \quad S = g^{jk} S_{jk}.$$

Dacă facem $i = j$ în (8) și sumăm, deducem

$$(10) \quad \lambda_{lk} - \lambda_{kl} = \frac{1}{n} (\bar{S}_{kl} - S_{kl}).$$

Să luăm acum în (8) $i = l$ și să sumăm. Dacă notăm $\alpha = g^{lm} \lambda_m$, avem

$$(11) \quad \bar{S}_{jk} = S_{jk} - \lambda_{kj} + (n-1) \lambda_{jk} + g_{jk} \alpha.$$

Dacă se înmulțește (11) cu g^{jk} și se sumează, rezultă α , care înlocuit în relația (11) conduce la

$$(12) \quad (n-1) \lambda_{lk} - \lambda_{kl} = \left(\bar{S}_{lk} - \frac{1}{2(n-1)} S g_{lk} \right) - \left(S_{lk} - \frac{1}{2(n-1)} S g_{lk} \right).$$

Relațiile (10) și (12) formează un sistem de ecuații în raport cu λ_{lk} și λ_{kl} . Rezolvînd acest sistem obținem

$$(13) \quad \lambda_{lk} = \bar{L}_{lk} - L_{lk}, \quad \lambda_{kl} = \bar{L}_{lk} - L_{lk} - \frac{1}{n} (\bar{S}_{kl} - S_{kl}),$$

unde am notat

$$(14) \quad L_{lk} = \frac{1}{n-2} \left(S_{lk} - \frac{1}{2(n-1)} S g_{lk} - \frac{1}{n} S_{kl} \right).$$

Dacă substituim în (8) pe λ_{lk} și λ_{kl} din (13) rezultă

$$(15) \quad \bar{W}_{jkl}^i = W_{jkl}^i,$$

unde

$$(16) \quad W_{jkl}^i = S_{jkl}^i - \frac{1}{n} \delta_j^i S_{kl} + \delta_k^i \left(L_{lj} - \frac{1}{n} S_{jl} \right) - \delta_l^i \left(L_{kj} - \frac{1}{n} S_{jk} \right) - \\ - g^{im} \left[g_{jk} \left(L_{lm} - \frac{1}{n} S_{ml} \right) - g_{jl} \left(L_{km} - \frac{1}{n} S_{mk} \right) \right].$$

Am obținut astfel

Teorema 1. Tensorul W_{jkl}^i dat de (16) este un invariant al grupului transformărilor de conexiuni Finsler conform metrică (1).

Observație. Invariantul W_{jkl}^i din teorema precedentă este tensorul conform de curbura al lui Weyl, deoarece conexiunea C_{ij}^h în spațiul tangent la varietatea diferențială M , [2], este conexiunea Levi-Civita a tensorului fundamental $g_{ij}(x, y)$ când x este fixat (avem $C_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m} \right)$, iar transformările conforme operează asupra lui C_{ij}^h la fel ca în cazul conform riemannian).

Invariantul W_{jkl}^i se poate exprima sub o formă mai simplă numai cu ajutorul v -tensorului de curbura S_{jkl}^i și a tensorului L_{ik} dat de (14).

Pentru aceasta, în relația

$$(17) \quad S_{jkl}^h + S_{kij}^h + S_{lji}^h = 0$$

obținută din identitatea lui Bianchi ([8], B_{11} , p. 37), scrisă în cazul unei conexiuni simetrice, să facem $h = j$ și să sumăm. Obținem

$$(18) \quad S_{ki} = - (S_{kl} - S_{lk}).$$

Din (14) și (18) rezultă

$$(19) \quad L_{ik} - L_{kl} = \frac{1}{n} S_{kl}, \quad (20) \quad L_{ik} - \frac{1}{n} S_{kl} = L_{kl}.$$

Dacă ținem seamă de (19) și (20) în expresia tensorului W_{jkl}^i dată de (16), aceasta se simplifică astfel:

$$(20) \quad W_{jkl}^i = S_{jkl}^i - \delta_j^i (L_{lk} - L_{kl}) + \delta_k^i L_{lj} - \delta_l^i L_{jk} - g^{im} (g_{jk} L_{ml} - g_{jl} L_{mk}).$$

În legătură cu v -tensorul conform de curbura W_{jkl}^i , stabilim următoarele propoziții și teoreme:

1°. Dacă se ține seamă că

$$(21) \quad S_{jkl}^i = -S_{jlk}^i,$$

după cum rezultă din (2) se verifică direct din (20) că

$$(22) \quad W_{jkl}^i = -W_{jlk}^i.$$

Rezultă astfel

Propoziția 1. *v-tensorul conform de curbura W_{jkl}^i este antisimetric în ultimii doi indici de covarianță k și l .*

2° Să considerăm acum tensorii contractați ai v -tensorului conform de curbura W_{jkl}^i și să folosim pentru aceștia notațiile

$$(23) \quad W_{jkl}^i = W_{kl}^i, \quad W_{jil}^i = W_{ji}^i, \quad W_{jki}^i = W_{jk}^i.$$

Dacă facem mai întâi $i = j$ în (20) și ținem seamă de (9), (19) și (23) rezultă

$$(24) \quad W_{kl}^i = 0.$$

Să facem acum în (20), $i = k$ și să notăm $L = g^{im} L_{mi}$. Obținem

$$(25) \quad W_{ji} = S_{ji} + (n-1) L_{ji} - L_{ij} + g_{ji} L.$$

Înlocuind (14) cu g^{ik} și sumând în raport cu l și k găsim

$$(26) \quad L = \frac{1}{n-2} \left[\frac{n-2}{2(n-1)^3} S - \frac{1}{n^1} S \right].$$

Dar din (21) pentru $i = j$ și $i = k$ rezultă

$$(27) \quad S_{ki} = -S_{ik}, \quad (28) \quad S_{ji} = -S_{ij}$$

și deci

$$(29) \quad S = 0, \quad (30) \quad S = -S.$$

Ținând seamă de (29) și (30) în (26) obținem

$$(31) \quad L = \frac{1}{2(n-1)^3} S = -\frac{1}{2(n-1)^2} S$$

și înlocuindu-l în (14) avem

$$(32) \quad W_{ji} = S_{ji} + (n-1) L_{ji} - L_{ij} - \frac{1}{2(n-1)} g_{ji} S.$$

Pentru a exprima pe L_{ik} în funcție de S_{ik} și S ținem seamă în (14) de relațiile (28), (30) și (18). Rezultă

$$(33) \quad L_{ik} = \frac{1}{n-2} \left[-\frac{n-1}{n} S_{ik} - \frac{1}{n^2} S_{ki} + \frac{1}{2(n-1)} g_{ik} S \right],$$

care înlocuit în expresia lui W_{ji} dată de (32) conduce la

$$(34) \quad W_{ji} = 0.$$

În sfârșit dacă facem $i = l$ în (22) obținem

$$(35) \quad W_{jk} = -W_{jk}$$

iar din (35) și (34) deducem

$$(36) \quad W_{jk} = 0.$$

Din relațiile (24), (34) și (36) rezultă

Teorema 2. Tensorii contractați ai v -tensorului conform de curbură W_{jkl}^i sînt nuli.

3°. În legătură cu anularea tensorului W_{jkl}^i se poate stabili

Teorema 3. v -tensorul conform de curbură W_{jkl}^i se anulează pentru $n \geq 4$, dacă se anulează v -tensorul de curbură S_{jkl}^i .

Demonstrație. Să presupunem că $S_{jkl}^i = 0$. Rezultă atunci că $S_{ikl}^i = S_{kl}^i = 0$, $S_{jkl}^i = S_{jk}^i = 0$ și $S_{jkl}^i g^{jk} = S^i = 0$. Dacă ținem seamă de aceste relații în (14) obținem $L_{ik} = L_{kl} = 0$ și deci din (20) rezultă $W_{jkl}^i = 0$.

Primită la 10 iunie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Matsumoto M., *A Finsler Connection with Many Torsions*. Tensor N. S., 17 (1966).
2. Matsumoto M., *The Theory of Finsler Connections*. Publ. of the Study Group of Geometry 5, Okayama Univ., Japan, 1970.
3. Miron R., *Spații Finsler. Cercetări ale matematicienilor români*. Conferința Națională de Geometrie, Timișoara, mai 1977.
4. Rund H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
5. Schouten J. A., *Ricci Calculus*. Second edition, Springer-Verlag, Berlin 1954.
6. Ghinea I., *Connexions finslériennes conformes métriques*. Anal. Univ. Timișoara, Ser. št. mat., XIV, 2, 101—115 (1976).
7. Ghinea I., *Invarianti ai grupurilor de transformări de conexiuni Finsler conform metrică*. Bul. Inst. polit. Iași, XXIV (XXVIII), 1—2, s. I (1978).
8. Ghinea I., *Conexiuni Finsler compatibile cu anumite structuri geometrice*. Teză de doctorat, Univ. „Babeș-Bolyai”, Cluj-Napoca, 1978.

COURBURES INVARIANTES AUX TRANSFORMATIONS DE CONNEXIONS FINSLÉRIENNES MÉTRIQUES (I)

(Résumé)

On établit les invariants du groupe de transformations des connexions finslériennes conformes métriques, où interviennent les tenseurs de courbure et de torsion. Dans cette première Note on obtient le v -tenseur conforme de courbure (Weyl).

ON BIRECURRENT TENSORS IN RIEMANNIAN SPACES

BY

CĂTĂLINA NIȚESCU

1. Let R_{hijk} be the curvature tensor and $R_{ij} = R^i_{ij}$ the Ricci-tensor of a Riemannian space V_n ($n > 2$). V_n is Ricci-birecurrent if

$$(1.1) \quad R_{ij, mn} = a_{mn} R_{ij},$$

where the index after the comma indicates the covariant derivative with respect to the metric $g_{ij} dx^i dx^j$ of the space. However if

$$(1.2) \quad R_{hijk, mn} = a_{mn} R_{hijk},$$

V_n is a birecurrent Riemannian space. Contracting (1.1) by g^{ij} we see that for a birecurrent and Ricci-birecurrent Riemannian space the relation

$$(1.3) \quad R_{, mn} = a_{mn} R \quad (R = g^{ij} R_{ij})$$

is satisfied. We shall call the tensor a_{mn} the tensor of recurrence of the space. We emphasize that throughout the discussion $a_{mn} \neq 0$; such spaces are usually called essentially 2-recurrent in the literature.

W. R o t e r [1] has shown that the tensor a_{mn} is symmetric. Y a n o and S a w a k i [2] have introduced the following tensor

$$(1.4) \quad W_{hijk} = aZ_{hijk} + \frac{b}{n-2} (g_{hk} G_{ij} - g_{hj} G_{ik} + g_{ij} G_{hk} - g_{ik} G_{hj}),$$

where a and b are constants, Z_{hijk} is the concircular curvature tensor introduced by K. Y a n o, and

$$(1.5) \quad G_{ij} = Z^h_{ijh} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}.$$

In this paper we shall consider $a + b \neq 0$ and $a \neq 0$.

The purpose of this paper is to define and study W -birecurrent spaces corresponding to the tensor W_{hijk} .

Therefore we shall call the V_n Riemannian space as being a W -birecurrent space if the tensor W_{hijk} satisfies

$$(1.6) \quad W_{hijk, mn} = a_{mn} W_{hijk},$$

with a_{mn} a non-zero tensor in V_n .

2. Theorem 2.1. *In BW_n the recurrence tensor a_{mn} is a symmetric tensor.*

Proof. We have :

$$(2.1) \quad W_{hijk, mn} - W_{hijk, nm} = (a_{mn} - a_{nm}) W_{hijk} = \Psi_{mn} W_{hijk},$$

where we have put

$$\Psi_{mn} = a_{mn} - a_{nm}.$$

From (1.4) the following equation holds good :

$$\begin{aligned} & W_{kjth, lm} - W_{kjth, ml} + W_{ihlm, kj} - W_{ihlm, jk} + W_{lmkj, th} - W_{lmkj, ht} = \\ &= \frac{b}{n-2} (g_{kh} \Psi_{lm} G_{jt} - g_{jh} \Psi_{lm} G_{kt} + g_{jt} \Psi_{lm} G_{kh} - g_{kt} \Psi_{lm} G_{jh} + g_{tm} \Psi_{kj} G_{hl} - \\ & - g_{hm} \Psi_{kj} G_{tl} + g_{hl} \Psi_{kj} G_{tm} - g_{tl} \Psi_{kj} G_{hm} + g_{lj} \Psi_{th} G_{mk} - g_{mj} \Psi_{th} G_{lk} + \\ & + g_{mk} \Psi_{th} G_{lj} - g_{lk} \Psi_{th} G_{mj}). \end{aligned}$$

In the preceding relation we shall group the terms conveniently

$$\begin{aligned} & \Psi_{lm} \left[W_{kjth} - \frac{b}{n-2} (g_{kh} G_{jt} - g_{jh} G_{kt} + g_{jt} G_{kh} - g_{kt} G_{jh}) \right] + \Psi_{kj} \left[W_{ihlm} - \right. \\ & - \frac{b}{n-2} (g_{tm} G_{hl} - g_{hm} G_{tl} + g_{hl} G_{tm} - g_{tl} G_{hm}) \left. \right] + \Psi_{th} \left[W_{lmkj} - \right. \\ & - \frac{b}{n-2} (g_{lj} G_{mk} - g_{mj} G_{lk} + g_{mk} G_{lj} - g_{lk} G_{mj}) \left. \right]. \end{aligned}$$

We observe that between the square brackets we get concircular curvature tensor, therefore the above relation becomes :

$$a \Psi_{lm} Z_{kjth} + a \Psi_{kj} Z_{ihlm} + a \Psi_{th} Z_{lmkj} = 0.$$

We know that the Z_{kjth} satisfies the conditions required (by Lemma 2, [3]). Therefore $\Psi_{lm} = 0$ and the theorem is proved.

Taking into consideration that Ψ_{mn} is a symmetric tensor, from (2.1) we obtain

$$(2.2) \quad W_{hijk, mn} - W_{hijk, nm} = 0,$$

and contracting (2.2) by hk we get

$$(2.3) \quad G_{ij, mn} - G_{ij, nm} = 0.$$

Applying Ricci's identity to (2.2) and (2.3) we have :

$$(2.4) \quad W_{pijk} R_{hmn}^p + W_{hpjk} R_{imn}^p + W_{hijk} R_{jmn}^p + W_{hijk} R_{kmn}^p = 0,$$

$$(2.5) \quad G_{pj} R_{imn}^p + G_{ip} R_{jmn}^p = 0.$$

Substituting [5] $R_{jih}^k = \frac{1}{a} (W_{jih}^k - A_{jih}^k)$ into the above equation, we have

$$G_{pj} (W_{imn}^p - A_{imn}^p) + G_{ip} (W_{jmn}^p - A_{jmn}^p) = 0.$$

Transvecting it with g^{im} we have

$$(2.6) \quad (a+b) G_p^m W_{jmn}^p - G_p^m A_{jmn}^p = G_{pj} L_n^p - (a+b) G_{pj} G_n^p,$$

where [5] $L_{jk} = A_{jtk}^k$.

Therefore we have

Theorem 2.2. *In W-birecurrent space the equation (2.4), (2.5) and (2.6) hold.*

Theorem 2.3. *Every W-birecurrent space is G-birecurrent with the same recurrence tensor field.*

Proof. Transvecting with g^{ij} the relation (1.6) we get

$$(2.7) \quad G_{hk, mn} = a_{mn} G_{hk}.$$

Theorem 2.4. *Every W-birecurrent space is Z-birecurrent with the same recurrence tensor field and reciprocally.*

Proof. Using (1.1), Lemma 2, and Theorem 2 from [4] we obtain the theorem.

3. Y. Ishii has introduced the con-harmonic curvature tensor

$$(3.1) \quad C'_{htjk} = R_{htjk} + \frac{1}{n-2} (g_{hj} R_{tk} - g_{hk} R_{tj} + g_{tk} R_{hj} - g_{tj} R_{hk});$$

we have immediately the following proposition:

Theorem 3.1. *AG'-birecurrent space is either birecurrent with the recurrence tensor a_{mn} symmetric, or the scalar curvature vanishes.*

Proof. Suppose V_n is a conharmonically birecurrent space, i.e.,

$$C'_{kjih, mn} = a_{mn} C'_{kjih},$$

a_{mn} being a non-zero tensor field of V_n , then

$$(3.2) \quad C'_{jih, lm} - C'_{jih, ml} = (a_{lm} - a_{ml}) C'_{jih}.$$

Contraction of (3.2) with respect to k and h yields

$$(3.3) \quad G'_{ji, lm} - G'_{ji, ml} = (a_{lm} - a_{ml}) G'_{ji},$$

where $G'_{ji} = R g_{ij} / (2-n)$.

Therefore from (3.3) we get

$$\frac{g_{ij}}{2-n} (R_{,lm} - R_{,ml}) = (a_{lm} - a_{ml}) \frac{g_{ij}}{2-n} R \quad \text{or} \quad (a_{lm} - a_{ml}) \frac{g_{ij}}{2-n} R = 0.$$

This leads to $a_{lm} = a_{ml}$ if $R \neq 0$ and conversely.

Theorem 3.2. *A conharmonically birecurrent space C'_h is conformally birecurrent. A conformally birecurrent space with its birecurrence tensor field a_{mn} is conharmonically birecurrent if its scalar curvature satisfies $R_{,mn} = a_{mn} R$.*

Proof. The tensors C_{hijk} and C'_{hijk} are related by

$$(3.4) \quad C_{hijk} = C'_{hijk} - \frac{1}{n-1} (g_{hk} G'_{ij} - g_{hj} G'_{ik}).$$

Transvecting (3.1) with g_{hk} we have

$$(3.5) \quad G'_{ji} = a_{mn} G'_{ji}.$$

Consequently, from (3.4) if we suppose V_n is a conharmonically bi-recurrent space, we have

$$(3.6) \quad C_{hijk, mn} = a_{mn} C_{hijk}.$$

Hence every BC'_n is BC_n .

Conversely, if (3.6) holds, thus from (3.4) we get

$$C'_{hijk, mn} - a_{mn} C_{hijk} = \frac{1}{n-1} [g_{hk} (G'_{ij, mn} - a_{mn} G'_{ij}) - g_{hj} (G'_{ik, mn} - a_{mn} G'_{ik})].$$

Hence $C'_{hijk, mn} - a_{mn} C_{hijk} = 0$ if $G'_{ij, mn} - a_{mn} G'_{ij} = 0$ is satisfied but $G'_{ij, mn} = a_{mn} G'_{ij}$ holds if and only if $R_{, mn} = a_{mn} R$ holds.

Theorem 3.3. *A conharmonically bi-recurrent space which is moreover a Ricci bi-recurrent space, is either bi-recurrent or the scalar curvature vanishes.*

Proof. If V_n is conharmonically bi-recurrent space we have (3.1) and (3.5) holds. From (3.5) we get $R_{, mn} = a_{mn} R$.

If V_n is also Ricci bi-recurrent with the bi-recurrence tensor b_{mn} , we have $R_{ij, mn} = b_{mn} R_{ij}$. Hence we have also $R_{, mn} = b_{mn} R$.

Therefore $(a_{mn} - b_{mn}) R = 0$. Hence if $a_{mn} = b_{mn}$ from (3.1) we obtain that $R_{hijk, mn} = a_{mn} R_{hijk}$.

4. The tensors W^k_{jth} and R^k_{jth} are related by

$$(4.1) \quad W^k_{jth} = a R^k_{jth} + A^k_{jth},$$

where

$$(4.2) \quad A^k_{jth} = \delta^k_h A_{ji} - \delta^k_i A_{jh} + g_{ji} A^k_h - g_{jh} A^k_i,$$

and

$$(4.3) \quad A_{ij} = \frac{b}{n-2} G_{ij} - \frac{aR}{2n(n-1)} g_{ij}, \quad \text{or,}$$

$$A_{ij} = \frac{b}{n-2} R_{ij} - \left[\frac{b}{n-2} + \frac{a}{2(n-1)} \right] R \frac{g_{ij}}{n}.$$

Definition 4.1. A non-flat n -dimensional Riemannian space is called A_n -bi-recurrent, if the tensor A^k_{jth} satisfies the condition

$$(4.4) \quad A^k_{jth, mn} = a_{mn} A^k_{jth}$$

for some non-zero tensor a_{mn} .

Theorem 4.1. *In A_n -bi-recurrent space the recurrence tensor a_{mn} is a symmetric tensor.*

Proof. We consider

$$(4.5) \quad A_{k jth, lm} - A_{k jth, ml} = K_{lm} A_{k jth},$$

where we have put $K_{lm} = a_{lm} - a_{ml}$.

From (4.2) by contraction we get $L_{ji, lm} - L_{ji, ml} = K_{lm} L_{ji}$, where

$$(4.6) \quad L_{ji} = bG_{ji} - a \frac{R}{n} g_{ji}, \quad \text{or} \quad L_{ji} = bR_{ji} - (a + b) \frac{R}{n} g_{ji}.$$

Therefore :

$$\begin{aligned} & A_{kji, lm} - A_{kji, ml} + A_{ihlm, kj} - A_{ihlm, jk} + A_{lmkj, ih} - A_{lmkj, hi} = \\ & = g_{kh} (A_{ji, lm} - A_{ji, ml}) - g_{ik} (A_{jh, lm} - A_{jh, ml}) + g_{ji} (A_{kh, lm} - A_{kh, ml}) - \\ & - g_{jh} (A_{ik, lm} - A_{ik, ml}) + g_{im} (A_{hl, kj} - A_{hl, jk}) - g_{il} (A_{hm, kj} - A_{hm, jk}) + \\ & + g_{hl} (A_{im, kj} - A_{im, jk}) - g_{hm} (A_{il, kj} - A_{il, jk}) + g_{lj} (A_{mk, ih} - A_{mk, hi}) - \\ & - g_{lk} (A_{mj, ih} - A_{mj, hi}) + g_{mk} (A_{lj, ih} - A_{lj, hi}) - g_{mj} (A_{lk, ih} - A_{lk, hi}) = \\ & = \frac{b}{n-2} \frac{1}{b} [g_{kh} K_{lm} L_{ji} - g_{ik} K_{lm} L_{jh} + g_{ji} K_{lm} L_{kh} - g_{jh} K_{lm} L_{ik} + \\ & + g_{im} K_{kl} L_{hi} - g_{il} K_{kj} L_{hm} + g_{hl} K_{kj} L_{im} - g_{hm} K_{kj} L_{il} + g_{lj} K_{ih} L_{mk} - \\ & - g_{lk} K_{ih} L_{mj} + g_{mk} K_{ih} L_{lj} - g_{mj} K_{ih} L_{lk}]. \end{aligned}$$

Using the first and the last member of the above equations we get

$$\begin{aligned} & K_{lm} \left[A_{kji, lm} - \frac{1}{n-2} (g_{kh} L_{ji} - g_{ik} L_{jh} + g_{ji} L_{kh} - g_{jh} L_{ik}) \right] + \\ & + K_{kj} \left[A_{ihlm} - \frac{1}{n-2} (g_{im} L_{hl} - g_{il} L_{hm} + g_{hl} L_{im} - g_{hm} L_{il}) \right] + \\ & + K_{ih} \left[A_{lmkj} - \frac{1}{n-2} (g_{lj} L_{mk} - g_{lk} L_{mj} + g_{mk} L_{lj} - g_{mj} L_{lk}) \right] = 0. \end{aligned}$$

The above equation reduces to

$$(4.7) \quad K_{lm} M_{kji, lh} + K_{kj} M_{ihlm} + K_{ih} M_{lmkj} = 0,$$

where

$$M_{kji, lh} = A_{kji, lh} - \frac{1}{n-2} (g_{kh} L_{ji} - g_{ik} L_{jh} + g_{ji} L_{kh} - g_{jh} L_{ik}).$$

Evidently the following equation holds, $M_{kji, lh} = M_{ihkj}$. We calculate

$$\begin{aligned} M_{kji, lh} &= A_{kji, lh} - \frac{b}{n-2} (g_{kh} G_{ji} - g_{ik} G_{jh} + g_{ji} G_{kh} - g_{jh} G_{ik}) + \\ &+ \frac{aR}{n(n-2)} (g_{kh} g_{ji} - g_{ik} g_{jh} + g_{ji} g_{kh} - g_{jh} g_{ik}), \\ M_{kji, lh} &= A_{kji, lh} + aZ_{kji, lh} - W_{kji, lh} + \frac{2Ra}{n(n-2)} (g_{kh} g_{ji} - g_{ik} g_{jh}). \end{aligned}$$

But

$$A_{kji, lh} - W_{kji, lh} = -aR_{kji, lh}.$$

Therefore

$$M_{kjih} = a(Z_{kjih} - R_{kjih}) + \frac{2Ra}{n(n-2)}(g_{kh}g_{ji} - g_{ik}g_{jh}),$$

or

$$(4.8) \quad M_{kjih} = \frac{aR}{(n-1)(n-2)}(g_{kh}g_{ji} - g_{ik}g_{jh}).$$

Remark. We observe that the M_{kjih} tensor is in fact

$$M_{kjih} = a(C_{kjih} - C_{kijh}).$$

Thus, on using Walker's Lemma 2 of [3], we have from (4.7) that since the space is not of scalar curvature zero, M_{kjih} is not all zero. Therefore it follows $K_{lm} = 0$.

This implies $a_{lm} = a_{ml}$. This completes the proof.

From (4.1), (4.3) and (4.6) we have the following corollaries.

Corollary 4.1. *An A-birecurrent space is with the scalar curvature birecurrent.*

Corollary 4.2. *A Ricci birecurrent space is A-birecurrent with the same birecurrence tensor field and reciprocally.*

Corollary 4.3. *Every A-birecurrent space is G_n -birecurrent. A G_n -birecurrent space is A-birecurrent if its scalar curvature R satisfies $R_{,mn} = a_{mn}R$.*

Corollary 4.4. *A necessary and sufficient condition that a Riemannian space V_n be A-birecurrent is that the equation*

$$W_{hijk, mn} - a_{mn}W_{hijk} = a(R_{hijk, mn} - a_{mn}R_{hijk})$$

holds for some non-zero tensor field a_{mn} of V_n .

Corollary 4.5. *Every L-birecurrent space is with the scalar curvature birecurrent.*

Corollary 4.6. *Every L-birecurrent space is A-birecurrent with the same birecurrence tensor field and reciprocally.*

Corollary 4.7. *An A-birecurrent space is A_n -birecurrent. An A_n -birecurrent space is A-birecurrent if it is with the scalar curvature birecurrent.*

Received June 14, 1978

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Roter W., *Some Remarks on Second Order Recurrent Spaces*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys., XII, 4, 207-211 (1964).
2. Yano K., Sawaki S., *Riemannian Manifolds Admitting a Conformal Transformation Group*. Journ. Diff. Geom., 2, 161-184 (1968).
3. Walker A. G., *On Ruse's Space of Recurrent Curvature*. Proc. Lond. Math. Soc., (2) 52, 36-64 (1950).
4. Nițescu C., *On Z-birecurrent spaces* (to appear).
5. Nițescu C., *Riemannian Spaces with A-recurrent Vector Field* (to appear).

TENSORI BIRECURENȚI ÎN SPAȚII RIEMANNIENE

(Rezumat)

Se definesc spațiile riemanniene V_n ($n > 2$) W -birecurente, conharmonic birecurente și A_n -birecurente, stabilindu-se proprietăți ale acestor spații.

INVARIANTI AI GRUPURILOR DE TRANSFORMĂRI DE CONEXIUNI FINSLER CONFORM APROAPE SIMPLECTICE

DE

GH. ANDRICIOAEI și I. GHINEA

În această lucrare ne propunem să determinăm câțiva invarianti ai grupurilor de transformări de conexiuni Finsler conform aproape simplectice. Notățiile și formulele sînt cele din [1], [5], [6].

1. Să considerăm transformările de conexiuni conform aproape simplectice ([6], (9.4), p. 74) în cazul $A_j^h = 0$, $\bar{P}_{jk}^h = 0$, $\bar{Q}_{jk}^h = 0$:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \bar{N}_j^h = N_j^h, \\ \bar{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \delta_j^h \omega_k - \delta_k^h \omega_j + a_{jk} a^{hl} \omega_l, \\ \bar{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \delta_j^h \lambda_k - \delta_k^h \lambda_j + a_{jk} a^{hl} \lambda_l. \end{cases}$$

a) Să facem mai întâi în a doua relație $h = j$ și să sumăm. Dacă notăm $F_{hk}^h = F_k$, $\bar{F}_{hk}^h = \bar{F}_k$ rezultă

$$(1.2) \quad \bar{F}_k = F_k - n \omega_k; \quad (1.2') \quad \omega_k = -\frac{1}{n} (\bar{F}_k - F_k).$$

Ținînd seamă de (1.2') în a doua relație din (1.1) obținem

$$(1.3) \quad \bar{\mathcal{F}}_{jk}^h = \mathcal{F}_{jk}^h,$$

unde

$$(1.4) \quad \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} F_l.$$

Dacă procedăm în mod analog cu a treia relație din (1.1) și folosim notațiile $C_{hk}^h = C_k$, $\bar{C}_{hk}^h = \bar{C}_k$ obținem

$$(1.5) \quad \bar{\mathcal{C}}_{jk}^h = \mathcal{C}_{jk}^h,$$

unde

$$(1.6) \quad \mathcal{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} C_l.$$

Din relațiile (1.3) și (1.5) rezultă

Teorema 1.1. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform aproape symplectică, atunci obiectele geometrice $\mathcal{F}_{jk}^h$ și $\mathcal{O}_{jk}^h$ date de (1.4) și (1.6) sînt invariante la transformările de conexiuni Finsler conform aproape symplectice (1.1).

b) Făcînd acum în a doua relație din (1.1) $h = k$, sumînd și folosind notațiile $F_{jk}^h = F_j, \bar{F}_{jk}^h = \bar{F}_j$, se obține

$$(1.7) \quad \bar{F}_j = F_j - (n+2) \omega_j; \quad (1.7') \quad \omega_j = -\frac{1}{n+2} (\bar{F}_j - F_j).$$

Din (1.7') și a doua relație din (1.1) rezultă

$$(1.8) \quad \mathcal{F}_{jk}^h = \mathcal{F}_{jk}^h,$$

unde

$$(1.9) \quad \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hi} F_i.$$

Procedînd în mod analog cu a treia relație din (1.1) și folosind notațiile $C_{jh}^h = C_j, \bar{C}_{jh}^h = \bar{C}_j$, se obține

$$(1.10) \quad \bar{\mathcal{O}}_{jk}^h = \mathcal{O}_{jk}^h,$$

unde

$$(1.11) \quad \mathcal{O}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hi} C_i.$$

Din (1.8) și (1.10) rezultă

Teorema 1.2. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform aproape symplectică, atunci obiectele geometrice $\mathcal{F}_{jk}^h$ și $\mathcal{O}_{jk}^h$ date de (1.9) și (1.11) sînt invariante la transformările de conexiuni Finsler conform aproape symplectice (1.1).

c) Făcînd $j = k$ în (1.7) și adunînd cu (1.2) obținem

$$(1.12) \quad \omega_k = -\frac{1}{2(n+1)} [(\bar{F}_k + \bar{F}_k) - (F_k + F_k)].$$

Dacă substituim (1.12) în a doua relație din (1.1), rezultă

$$(1.13) \quad \bar{\mathcal{F}}_{jk}^h = \mathcal{F}_{jk}^h,$$

unde

$$(1.14) \quad \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{2(n+1)} [\delta_j^h (F_k + F_k) + \delta_k^h (F_j + F_j) - a_{jk} a^{hi} (F_i + F_i)].$$

În mod analog se obține

$$(1.15) \quad \bar{e}_{jk}^h = e_{jk}^h,$$

unde

$$(1.16) \quad e_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{2(n+1)} [\delta_j^h (C_k + C_k) + \delta_k^h (C_j + C_j) - a_{jk} a^{hl} (C_l + C_l)].$$

Din (1.13) și (1.15) rezultă

Teorema 1.3. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform aproape symplectică, atunci obiectele geometrice $(\mathcal{F}_{jk}^h)$ și e_{jk}^h date de (1.14) și (1.16) sînt invariante la transformările de conexiuni Finsler conform aproape symplectice (1.1).

2. Să considerăm conexiunea Finsler conform aproape symplectică $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ dată de ([6], (8.3'), p. 73) cu $U_{pk}^q = 0$, $V_{pk}^q = 0$:

$$(2.1) \quad \begin{cases} N_j^h = \hat{N}_j^h, \\ F_{jk}^h = \hat{F}_{jk}^h - \delta_j^h \omega_k - \delta_k^h \omega_j + a_{jk} a^{hl} \omega_l, \\ C_{jk}^h = \hat{C}_{jk}^h - \delta_j^h \lambda_k - \delta_k^h \lambda_j + a_{jk} a^{hl} \lambda_l, \end{cases}$$

unde $(\hat{N}_j^h, \hat{F}_{jk}^h, \hat{C}_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler aproape symplectică fixată.

a) Dacă facem $h = j$ în ultimele două relații din (2.1) și procedăm ca la punctul 1.a, punînd $\hat{F}_k = \hat{F}_{hk}^h$ și $\hat{C}_k = \hat{C}_{hk}^h$ obținem

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_{jk}^h &\equiv F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} F_l = \\ &= \hat{F}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{F}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{F}_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} \hat{F}_l, \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} e_{jk}^h &\equiv C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} C_l = \\ &= \hat{C}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{C}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{C}_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} \hat{C}_l. \end{aligned}$$

Din relațiile (2.2) și (2.3) rezultă următoarele teoreme:

Teorema 2.1. Dacă $(\hat{N}_j^h, \hat{F}_{jk}^h, \hat{C}_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler aproape symplectică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, e_{jk}^h)$ dată de

$$(2.4) \quad \begin{cases} N_j^h = \hat{N}_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = \hat{F}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{F}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{F}_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} \hat{F}_l, \\ e_{jk}^h = \hat{C}_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h \hat{C}_k - \frac{1}{n} \delta_k^h \hat{C}_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} \hat{C}_l. \end{cases}$$

este o conexiune Finsler conform aproape symplectică.

Teorema 2.2. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform aproape simplctică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(2.5) \quad \begin{cases} N_j^h = N_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} F_l, \\ \mathcal{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{n} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n} a_{jk} a^{hl} C_l \end{cases}$$

este o conexiune Finsler conform aproape simplctică.

Dacă în teoremele 2.1 și 2.2 ținem seamă de formulele (2.2) și (2.3) și de teorema 1.1, obținem

Teorema 2.3. Conexiunea Finsler $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ conform aproape simplctică dată de (2.4) sau (2.5) este un invariant al grupului de transformări de conexiuni Finsler conform aproape simplctice (1.1).

b) Dacă facem $h = k$ în ultimele două relații din (2.1), procedăm analog ca la punctul 2 a și notăm $\overset{\circ}{F}_j^h = \overset{\circ}{F}_{jh}^h$, $\overset{\circ}{C}_j^h = \overset{\circ}{C}_{jh}^h$ obținem relațiile

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_{jk}^h &= F_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} F_l = \\ &= \overset{\circ}{F}_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h \overset{\circ}{F}_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h \overset{\circ}{F}_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} \overset{\circ}{F}_l, \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}_{jk}^h &= C_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} C_l = \\ &= \overset{\circ}{C}_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h \overset{\circ}{C}_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h \overset{\circ}{C}_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} \overset{\circ}{C}_l. \end{aligned}$$

Din relațiile (2.6) și (2.7) rezultă următoarele două teoreme:

Teorema 2.4. Dacă $(\overset{\circ}{N}_j^h, \overset{\circ}{F}_{jk}^h, \overset{\circ}{C}_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler aproape simplctică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(2.8) \quad \begin{cases} N_j^h = \overset{\circ}{N}_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = \overset{\circ}{F}_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h \overset{\circ}{F}_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h \overset{\circ}{F}_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} \overset{\circ}{F}_l, \\ \mathcal{C}_{jk}^h = \overset{\circ}{C}_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h \overset{\circ}{C}_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h \overset{\circ}{C}_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} \overset{\circ}{C}_l \end{cases}$$

este o conexiune Finsler conform aproape simplctică.

Teorema 2.5. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform aproape simplctică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(2.9) \quad \begin{cases} N_j^h = N_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h F_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h F_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} F_l, \\ \mathcal{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{n+2} \delta_j^h C_k - \frac{1}{n+2} \delta_k^h C_j + \frac{1}{n+2} a_{jk} a^{hl} C_l \end{cases}$$

este o conexiune Finsler conform aproape symplectică.

Din teoremele 2.3, 2.4, 1.2 și din formulele (2.6) și (2.7) rezultă

Teorema 2.6. Conexiunea Finsler $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ conform aproape symplectică dată de (2.8) sau (2.9) este un invariant al grupului de transformări de conexiuni Finsler conform aproape symplectice (1.1).

c) Plecînd de la ultimele două relații din (2.1) și urmînd aceeași cale ca la punctul 1.c se obțin teoremele:

Teorema 2.7. Dacă $(\overset{\circ}{N}_j^h, \overset{\circ}{F}_{jk}^h, \overset{\circ}{C}_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler aproape symplectică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(2.10) \quad \begin{cases} N_j^h = \overset{\circ}{N}_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = \overset{\circ}{F}_{jk}^h - \frac{1}{2(n+1)} [\delta_j^h (\overset{\circ}{F}_k + \overset{\circ}{F}_k) + \delta_k^h (\overset{\circ}{F}_j + \overset{\circ}{F}_j) - \\ - a_{jk} a^{hl} (\overset{\circ}{F}_l + \overset{\circ}{F}_l)], \\ \mathcal{C}_{jk}^h = \overset{\circ}{C}_{jk}^h - \frac{1}{2(n+1)} [\delta_j^h (\overset{\circ}{C}_k + \overset{\circ}{C}_k) + \delta_k^h (\overset{\circ}{C}_j + \overset{\circ}{C}_j) - \\ - a_{jk} a^{hl} (\overset{\circ}{C}_l + \overset{\circ}{C}_l)] \end{cases}$$

este o conexiune Finsler conform aproape symplectică.

Teorema 2.8. Dacă $(N_j^h, F_{jk}^h, C_{jk}^h)$ este o conexiune Finsler conform aproape symplectică, atunci conexiunea $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ dată de

$$(2.11) \quad \begin{cases} N_j^h = N_j^h, \\ \mathcal{F}_{jk}^h = F_{jk}^h - \frac{1}{2(n+1)} [\delta_j^h (F_k + F_k) + \delta_k^h (F_j + F_j) - \\ - a_{jk} a^{hl} (F_l + F_l)], \\ \mathcal{C}_{jk}^h = C_{jk}^h - \frac{1}{2(n+1)} [\delta_j^h (C_k + C_k) + \delta_k^h (C_j + C_j) - \\ - a_{jk} a^{hl} (C_l + C_l)] \end{cases}$$

este o conexiune Finsler conform aproape symplectică.

Din teoremele 2.7, 2.8, 1.2 și din formulele (2.10) și (2.11) rezultă

Teorema 2.9. Conexiunea Finsler $(N_j^h, \mathcal{F}_{jk}^h, \mathcal{C}_{jk}^h)$ conform aproape symplectică dată de (2.10) sau (2.11) este un invariant al grupului de transformări de conexiuni Finsler conform aproape symplectice (1.1).

3. Aplicînd operatorul $\theta_{hs}^{*rj} = \frac{1}{2} (\delta_h^r \delta_s^j + a_{hs} a^{jr})$, ([5], [6]), relației a doua din (1.1) se obține

$$(3.1) \quad \theta_{hs}^{*rj} \bar{F}_{jk}^h = \theta_{hs}^{*rj} F_{jk}^h - \delta_s^r \omega_k.$$

Dacă facem în (3.1) $r = k$, rezultă

$$(3.2) \quad \theta_{hs}^{*kj} \bar{F}_{jk}^h = \theta_{hs}^{*kj} F_{jk}^h - \omega_s.$$

Eliminînd ω_k între relațiile (3.1) și (3.2) obținem

$$(3.3) \quad \theta_{hs}^{*rj} \bar{F}_{jk}^h - \delta_s^r \theta_{hk}^{*tj} \bar{F}_{jt}^h = \theta_{hs}^{*rj} F_{jk}^h - \delta_s^r \theta_{hk}^{*tj} F_{jt}^h.$$

Procedînd în mod analog cu relația a treia din (1.1) vom obține

$$(3.4) \quad \theta_{hs}^{*rj} \bar{C}_{jk}^h - \delta_s^r \theta_{hk}^{*tj} \bar{C}_{jt}^h = \theta_{hs}^{*rj} C_{jk}^h - \delta_s^r \theta_{hk}^{*tj} C_{jt}^h.$$

Astfel din relațiile (3.3) și (3.4) rezultă

Teorema 3.1. Obiectele geometrice

$$I_{sk} = \theta_{hs}^{*rj} F_{jk}^h - \delta_s^r \theta_{hk}^{*tj} F_{jt}^h$$

și

$$J_{sk} = \theta_{hs}^{*rj} C_{jk}^h - \delta_s^r \theta_{hk}^{*tj} C_{jt}^h$$

sînt invariante la transformările de conexiuni Finsler conform aproape symplectice (1.1).

Primită la 5 iulie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Matsumoto M., *The Theory of Finsler Connections*. Publ. of the Study Group of Geometry V, Dep. of Math. Okayama Univ., Japan, 1970.
2. Miron R., *Asupra conexiunilor compatibile cu structuri conform aproape symplectice sau conform metrice*. An. Univ. Timișoara, ser. Șt., mat. și fiz., V (1967).
3. Miron R., *Espace à structure conforme presque symplectique*. Coll. math. Warszawa, XXVI (1972).
4. Rund H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
5. Ghinea I., *Conexiuni conform aproape symplectice*. Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3-4, s. I (1977).
6. Ghinea I., *Conexiuni Finsler compatibile cu anumite structuri*. Teză de doctorat, Univ. „Babeș-Bolyai”, Cluj - Napoca, 1978.

INVARIANTS DES GROUPS DE TRANSFORMATION DES CONNEXIONS FINSLÉRIENNES CONFORME PRESQUE SYMPLECTIQUES

(Résumé)

En prenant comme point de départ les ouvrages [5], [6] où est déterminé la forme générale des connexions Finsler conformes presque symplectiques et le group de transformations de ces connexions, on établit quelques invariants de ce group de transformations, invariants qui sont exprimés par les coefficients de la connexion et par leurs contractions.

GROWTH PROPERTIES OF DIFFERENCE EQUATIONS

BY

PAVEL TALPALARU

1. Introduction. In this paper, we concern with the study of certain growth properties of solutions of difference equations. All our results generalize and extend the results of G.S. Ladd [3] to difference equations.

2. Notations and Definitions. Consider the non-linear system of difference equations

$$(2.1) \quad x(n+1) = f(n, x(n))$$

and let $x(n; n_0, x_0)$ denote the solution passing through the point (n_0, x_0) . We assume throughout that f is continuously differentiable in some region $I(0) \times D$, where $I(0) = \{0, 1, 2, \dots\}$ and D is a region in the p -dimensional x -space. Generally, we shall denote by $I(m)$ the set of non-negative integers $\{m, m+1, \dots\}$. Since $f(n, x)$ is continuous in x , the solution of (2.1) depends continuously on the initial state x_0 . When $x(n; n_0, x_0)$ is a solution of (2.1), the linear difference equation

$$(2.2) \quad z(n+1) = f_x(n, x(n; n_0, x_0)) z(n), \quad n \in I(n_0),$$

where $f_x(n, x)$ is the Jacobian matrix, is called the linear variational equation of (2.1) with respect to $x(n; n_0, x_0)$. In the sequel, the fundamental matrix solution of (2.2) which is identity at $n = n_0$ will be denoted by $\Phi(n; n_0, x_0)$, $n \in I(n_0)$. It follows directly from (2.1) and the existence of f_x that

$$\frac{\partial}{\partial x_0} x(n; n_0, x_0) = \Phi(n; n_0, x_0).$$

Definition 2.1. The solution $x \equiv 0$ of (2.1) is said to be *slowly-growing in variation* if there exist two positive functions $K(n)$ and $\alpha(n) > 1$ such that,

$$(2.3) \quad \|\Phi(n; n_0, x_0)\| \leq K(n_0) \prod_{r=n_0}^n \alpha(r), \quad \text{for } n \in I(n_0)$$

whenever $\|x_0\| < \infty$.

Remark 2.1. When $K(n) \equiv K = \text{const.}$ and $\alpha(n) \equiv \alpha = \text{const.}$ the solution $x \equiv 0$ of (2.1) is said to be *globally uniformly slowly-growing in variation* [2], [3].

Definition 2.2. The solution $x \equiv 0$ of (2.1) is said to be *globally uniformly stable in variation* if there exists M , a positive constant, such that

$$(2.4) \quad \|\Phi(n; n_0, x_0)\| \leq M, \quad \text{for } n \in I(n_0),$$

whenever $\|x_0\| < \infty$.

Definition 2.3. The *type number* of a vector-valued function $z(t)$ is defined by

$$\tau = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|z(n)\|}{n}.$$

If $\tau \leq 0$, the function $z(t)$ is said to be *slowly growing*. It is easy to prove that a function $z(t)$ is slowly growing if and only if for every $\alpha > 1$ there exists a constant K which may depend on α , such that

$$(2.5) \quad \|z(n)\| \leq K\alpha^n, \quad n \in I(0).$$

3. Preliminary Results. In this section, we construct some Lyapunov functions which will be used to study growth properties of (2.1).

Theorem 3.1. Assume that the solution $x \equiv 0$ of (2.1) is *slowly growing in variation*. Then there exists a function $V_1(n, x)$ having the following properties:

- a) $V_1(n, x)$ is defined and continuous with respect to x for $(n, x) \in I(0) \times R^p$;
- b) for $(n, x) \in I(0) \times R^p$, $\|x\| \leq V_1(n, x) \leq K(n)\|x\|$;
- c) for $(n, x) \in I(0) \times R^p$, $\Delta V_1(n, x) \leq (\alpha(n) - 1)V_1(n, x)$;
- d) for $(n, x), (n, \bar{x}) \in I(0) \times R^p$, $|V_1(n, x) - V_1(n, \bar{x})| \leq K(n)\|x - \bar{x}\|$.

Proof. The slowly growing in variation of the null solution of (2.1) and Lemma 1 [2] imply that

$$(3.1) \quad \|x(n; n_0, x_0)\| \leq [K(n_0) \prod_{r=n_0}^n \alpha(r)] \|x_0\|, \quad \text{for } n \in I(n_0)$$

whenever $\|x_0\| < \infty$. Define

$$(3.2) \quad V_1(n, x) = \sup_{v \geq 0} \|x(n+v; n, x)\| \prod_{r=n}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1}, \quad \text{for } (n, x) \in I(0) \times R^p,$$

where $x(n+v; n, x)$ is the solution of (2.1) through $(n, x) \in I(0) \times R^p$. From 3.1) we have

$$\|x(n+v; n, x)\| \leq [K(n) \prod_{r=n}^{n+v} \alpha(r)] \|x\|,$$

from where

$$\|x(n+v; n, x)\| \prod_{r=n}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1} \leq K(n) \|x\|,$$

and therefore (3.2) has a meaning. The continuity of $V_1(n, x)$ with respect to x is immediately. From (3.1) and (3.2) one obtains also b). In order to prove c) we consider the total difference

$$\begin{aligned} \Delta V_1(n, x) &= V_1(n+1, x(n+1; n, x)) - V_1(n, x(n; n, x)) = \\ &= \sup_{v \geq 0} \|x(n+v+1; n, x)\| \prod_{r=n+1}^{n+v+1} [\alpha(r)]^{-1} - \sup_{v \geq 1} \|x(n+v; n, x)\| \\ &\prod_{r=n}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1} = \sup_{v \geq 1} \|x(n+v; n, x)\| \prod_{r=n+1}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1} - \sup_{v \geq 0} \|x(n+v; n, x)\| \\ &\prod_{r=n}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1} \leq \sup_{v \geq 1} \{ \|x(n+v; n, x)\| \prod_{r=n}^{n+1} [\alpha(r)]^{-1} \} \alpha(n) - \\ &- \sup_{v \geq 0} \{ \|x(n+v; n, x)\| \prod_{r=n}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1} \} = (\alpha(n) - 1) V_1(n, x). \end{aligned}$$

To prove d) let us consider $(n, x), (n, \bar{x}) \in I(0) \times R^p$. Using Lemma 1 [1] and (3.1) we have

$$\begin{aligned} |V_1(n, x) - V_1(n, \bar{x})| &\leq \sup_{v \geq 0} \|x(n+v; n, x) - x(n+v; n, \bar{x})\| \\ &\prod_{r=n}^{n+v} [\alpha(r)]^{-1} \leq \|x - \bar{x}\| \sup_{\xi} \|\Phi(n+v; n, \xi)\| \leq K(n) \|x - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Theorem 3.1 is thus proved.

Remark. When (3.1) holds with $K(n) \equiv K = \text{const.}$, $\alpha(n) \equiv \alpha = \text{const.}$ we say that the null solution of (2.1) is *globally uniformly slowly-growing*. By a similar way we may state another converse

Theorem 3.2. Assume that the null solution of (2.1) is globally uniformly stable in variation. Then there exists a function $V_2(n, x)$ possessing the following properties:

- $V_2(n, x)$ is defined and continuous with respect to x for $(n, x) \in I(0) \times R^p$;
- for $(n, x) \in I(0) \times R^p$, $\|x\| \leq V_2(n, x) \leq M \|x\|$;
- for $(n, x) \in I(0) \times R^p$, $\Delta V_2(n, x) \leq 0$;
- for $(n, x), (n, \bar{x}) \in I(0) \times R^p$, $|V_2(n, x) - V_2(n, \bar{x})| \leq M \|x - \bar{x}\|$.

4. Main Results. In order to study growth properties, together with (2.1) we consider also the system

$$(4.1) \quad y(n+1) = f(n, y(n)) + g(n, y(n)).$$

Lemma 4.1. Let the solution $x \equiv 0$ of (2.1) be slowly-growing in variation. Suppose that there exists a positive non-decreasing continuous function $\omega(n, y)$ defined on $I(0) \times R_+$, such that

$$(4.2) \quad \|g(n, y)\| \leq \omega(n, \|y\|).$$

If $u(n; n_0, u_0)$ is the maximal solution of equation

$$(4.3) \quad u(n+1) = \alpha(n) u(n) + K(n+1) \omega(n, u(n)),$$

with $u_0 = V(n_0, y_0)$, then for any solution $y(n; n_0, y_0)$ of (4.1) we have

$$(4.4) \quad \|y(n; n_0, y_0)\| \leq u(n; n_0, u_0).$$

Proof. By Theorem 3.1 there exists a function $V_1(n, x)$ having the properties a) — d) stated in the above section. With this, the proof of the inequality (4.4) can be given in similar lines as in Lemma 3 and Theorem 17.2 [4, pp. 88—89].

Remark 4.1. In the hypotheses of the lemma, if we suppose in addition that the maximal solution of (4.3) is *globally uniformly slowly-growing*, then all solutions of (4.1) are *globally uniformly slowly-growing*. Sufficient conditions which assure this requirement are given by the following

Theorem 4.1. *Let the solution $x \equiv 0$ of (2.1) be globally uniformly slowly-growing in variation. Suppose that $g(n, y)$ satisfies*

$$\|g(n, y)\| \leq \lambda(n) \|y\|, \quad n \in I(0), \quad \|y\| < \infty,$$

where $\lambda(n)$ is such that $\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda(n) \leq M_1 < \infty$.

Then, all solutions of (4.1) are *globally uniformly slowly-growing* provided that $KM_1 < \alpha$.

Proof. By hypothesis there exist two positive constants K and α such that $\|\Phi(n; n_0, x_0)\| \leq K\alpha^{n-n_0}$ for $n \in I(n_0)$. According to Lemma 4.1 the difference equation (4.3) becomes

$$(4.5) \quad u(n+1) = \alpha u(n) + K\lambda(n)u(n)$$

and if we take $u(n_0) = u_0 = V(n_0, y_0)$, then for any solution $y(n; n_0, y_0)$ of (4.1) we have

$$\|y(n; n_0, y_0)\| \leq u(n; n_0, u_0).$$

For maximal solution $u(n; n_0, u_0)$ of (4.3) which is given by

$$u(n; n_0, u_0) = u_0 \prod_{r=n_0}^{n-1} (\alpha + K\lambda(r)),$$

by Theorem 3.1, we have

$$u(n; n_0, u_0) = V(n_0, y_0) \prod_{r=n_0}^{n-1} (\alpha + K\lambda(r)) \leq K\|y_0\| \prod_{r=n_0}^{n-1} (\alpha + K\lambda(r)).$$

Our aim is to show that the maximal solution of (4.5) is *globally uniformly slowly-growing*, so that the conclusion of the theorem follows immediately by the previous remark. To prove this, we use a similar technique to that of [4, p. 92]. If we denote

$$(4.6) \quad h(n, n_0) = K \prod_{r=n_0}^{n-1} (\alpha + K\lambda(r))$$

and because $K\lambda(r)/\alpha > KM/\alpha < 1$ we have

$$\begin{aligned} \ln h(n, n_0) &= \ln K\alpha^{n-n_0} + \sum_{r=n_0}^{n-1} \frac{\ln(1 + K\lambda(r))}{\alpha} = \ln K\alpha^{n-n_0} + \\ &+ \sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{K\lambda(r)}{\alpha} \right)^s \frac{(-1)^{s-1}}{s} = \ln K\alpha^{n-n_0} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\frac{K\lambda(r)}{\alpha} \right)^s \leq \ln K\alpha^{n-n_0} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \left(\frac{KM_1}{\alpha} \right)^s = \ln K\alpha^{n-n_0} \left(\frac{1 + KM_1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

From here we obtain

$$h(n, n_0) \leq K \alpha^{n-n_0} \left(1 + \frac{KM_1}{\alpha} \right) = K_1 \alpha^{n-n_0},$$

where $K_1 = K(1 + KM_1/\alpha)$, and therefore

$$\|y(n; n_0, y_0)\| \leq K_1 \|y_0\| \alpha^{n-n_0}, \quad n \in I(n_0),$$

which shows that all solutions of (2.1) are globally uniformly slowly-growing.

Remark 4.2. Assuming that the null solution of (2.1) is globally uniformly stable in variation and that the others hypotheses of Theorem hold, then every solution of (4.1) is bounded. To prove this it suffices to make $\alpha = 1$ in previous theorem.

Theorem 4.2. Let the solution $x \equiv 0$ of (2.1) be globally uniformly slowly-growing in variation and let the perturbation $g(n, y)$ satisfy

$$(4.7) \quad \|g(n, y)\| \leq \lambda_1(n) + \lambda_2(n) \|y\|, \quad n \in I(0), \quad \|y\| < \infty,$$

where $\lambda_1(n)$ is slowly-growing and $\sum_{s=n_0}^{\infty} \lambda_2(s) \leq M_1$.

Then all solutions of the perturbed system (4.1) are globally uniformly slowly-growing provided that $KM_1 < \alpha$.

Proof. Following the proof of the previous Theorem, the equation (4.3) reduces to

$$u(n+1) = (\alpha + K\lambda_2(n)) u(n) + K\lambda_1(n)$$

and therefore together with Lemma 1, Corollary 2 [5] we have

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \|y(n; n_0, y_0)\| &\leq K \|y_0\| \prod_{s=n_0}^{n-1} [\alpha + K\lambda_2(s)] + \\ &+ K \sum_{s=n_0}^{n-1} \lambda_1(s) \prod_{r=s+1}^{n-1} [\alpha + K\lambda_2(r)]. \end{aligned}$$

If $h(n, n_0)$ is given by (4.6) then (4.8) may be written as

$$(4.9) \quad \|y(n; n_0, y_0)\| \leq \|y_0\| h(n, n_0) + \sum_{s=n_0}^{n-1} \lambda_1(s) h(n, s+1),$$

where $h(n, n_0) \leq K_1 \alpha^{n-n_0}$, $K_1 = K(1 + KM_1 \alpha^{-1})$.

From here it follows

$$\|y(n; n_0, y_0)\| \leq K_1 (\|y_0\| + K(n - n_0)) \alpha^n.$$

If we choose K_2 so that $K_1 (\|y_0\| + K(n - n_0)) < K_2 \alpha^n$ for $n \geq N_1 \in I(0)$, then

$$\|y(n; n_0, y_0)\| \leq K_2 \alpha^n, \quad \text{for } n \geq N_1,$$

which shows that each solution of (4.1) is slowly-growing, and the proof is complete.

Theorem 4.3. Let the solution $x \equiv 0$ of (2.1) be globally uniformly stable in variation. Suppose that $g(n, y)$ satisfies

$$(4.10) \quad \|g(n, y)\| \leq \lambda(n), \quad n \in I(n_0), \quad \|y\| < \infty.$$

Let $\Lambda(n) = (\varphi(n))^{-1} \sum_{s=n_0}^{n-1} \lambda(s)$, where $\varphi(n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$:

a) if $\Lambda(n)$ is bounded, then any solution of (4.2) satisfies $y(n; n_0, y_0) = O(\varphi)$ as $n \rightarrow \infty$;

b) if $\Lambda(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, then each solution of (4.2) satisfies $y(n; n_0, y_0) = o(\varphi(n))$.

Proof. If we consider firstly that $\|\Phi(n; n_0, x_0)\| \leq K\alpha^{n-n_0}$ for $n \in I(n_0)$ then, according to Lemma 4.1 the difference equation (4.3) becomes

$$(4.11) \quad u(n+1) = u(n) + K\lambda(n),$$

and if we take $u(n_0) = u_0 = V(n_0, y_0)$, then for any solution $y(n; n_0, y_0)$ of (4.2) we have $\|y(n; n_0, y_0)\| \leq u(n; n_0, u_0)$ where the maximal solution $u(n; n_0, u_0)$ of (4.11) is given by

$$u(n; n_0, u_0) = \alpha^{n-n_0} u_0 + K \sum_{s=n_0}^{n-1} \alpha^{n-s-1} \lambda(s).$$

By Theorem 3.1 we have

$$(4.12) \quad \|y(n; n_0, y_0)\| \leq K \|y_0\| \alpha^{n-n_0} + K \sum_{s=n_0}^{n-1} \lambda(s) \alpha^{n-s-1}$$

from where for $\alpha = 1$

$$\|y(n; n_0, y_0)\| \leq K \|y_0\| + K \sum_{s=n_0}^{n-1} \lambda(s).$$

Thus, if $\Lambda(n)$ is bounded, $\Lambda(n) \leq M$,

$$(\varphi(n))^{-1} \|y(n; n_0, y_0)\| \leq K \|y_0\| + M = M_1$$

which implies a), and if $\Lambda(n) \rightarrow 0$, we have

$(\varphi(n))^{-1} \|y(n; n_0, y_0)\| \leq K \|y_0\| (\varphi(n))^{-1} + \Lambda(n) \rightarrow 0$, which implies b).

Received October 13, 1977

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Brauer F., *Perturbations of Nonlinear Systems of Differential Equations* (II). J. Math. Anal., Appl., 14, 198—363 (1966).
2. Brauer F., *Perturbations of Nonlinear Systems of Differential Equations* (III). J. Math. Anal. Appl., 31, 37—48 (1970).
3. Ladde G. S., *Growth Properties of Function Differential Equations*. Atti Accademia Nazionale Lincei, LV, 356—363 (1973).
4. Мартиниук Д. И., *Лекций по качественной теории разностных уравнений*. „Наука Думка“ Киев, 1972.
5. Sugiyama S., *Difference Inequalities and Their Applications to Stability Problems*. Japan—United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations, 1971.

ASUPRA EVALUĂRII SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR CU DIFERENȚE

(Rezumat)

Se dau evaluări ale soluțiilor ecuațiilor cu diferențe de forma (2.1) și (4.1) cu ajutorul soluției matriciale a sistemului în variații (2.2).

THE SOLUTION OF A HOMOGENEOUS EVOLUTION TWO-PARAMETER SYSTEM

BY

N. GRĂDINARU

Here we seek for the solution of the system ([2], [3])

$$(1) \quad \begin{cases} L_1 u \equiv u_{x_1} - \alpha^2 u_{z_1 z_1} = 0, \\ L_2 u \equiv u_{x_2} - \beta^2 u_{z_2 z_2} = 0, \end{cases} \quad \text{for} \quad \begin{cases} 0 < x_1 \leq T, & 0 < z_1 < a, \\ 0 < x_2 \leq T, & 0 < z_2 < b, \end{cases}$$

(α and β are constants) satisfying the homogeneous boundary conditions

$$(2) \quad \begin{cases} u(x_1, x_2, 0, z_2) = 0, \\ u(x_1, x_2, a, z_2) = 0, \\ u(x_1, x_2, z_1, 0) = 0, \\ u(x_1, x_2, z_1, b) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (0 \leq x_1 \leq T, & 0 \leq x_2 \leq T, \\ 0 \leq z_1 \leq a, & 0 \leq z_2 \leq b) \end{cases}$$

and the initial condition

$$(3) \quad u(0, 0, z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2),$$

where $\varphi(z_1, z_2)$ is a bounded, integrable function for $0 \leq z_1 \leq a$, $0 \leq z_2 \leq b$ and $\varphi(0, z_2) = \varphi(z_1, 0) = \varphi(a, z_2) = \varphi(z_1, b) = 0$.

We look for a solution of the form

$$(4) \quad u(x_1, x_2, z_1, z_2) = X_1(x_1) X_2(x_2) Z_1(z_1) Z_2(z_2).$$

From (1) and (2) it follows:

$$\begin{cases} X_1' Z_1 = \alpha^2 X_1 Z_1'', & \begin{cases} Z_1(0) = 0, & Z_1(a) = 0, \\ Z_2(0) = 0, & Z_2(b) = 0, \end{cases} \\ X_2' Z_2 = \beta^2 X_2 Z_2'', & \end{cases}$$

or

$$(5) \quad \begin{cases} Z_1'' + \lambda Z_1 = 0, \\ X_1' + \alpha^2 \lambda X_1 = 0, \\ Z_2'' + \mu Z_2 = 0, \\ X_2' + \beta^2 \mu X_2 = 0. \end{cases}$$

The function $Z_1(z_1)$ and $Z_2(z_2)$ are solutions of the problems

$$(6) \quad \begin{cases} Z_1'' + \lambda Z_1 = 0, \\ Z_1(0) = 0, \quad Z_1(a) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Z_2'' + \mu Z_2 = 0, \\ Z_2(0) = 0, \quad Z_2(b) = 0; \end{cases}$$

with the eigenvalues and eigenfunctions, respectively

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, & Z_{1n}(z_1) = \sin \frac{n\pi}{a} z_1, & (n = 1, 2, \dots) \\ \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, & Z_{2m}(z_2) = \sin \frac{m\pi}{b} z_2, & (m = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

The solutions of (5) are

$$(8) \quad \begin{cases} X_{1n}(x_1) = C_n \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 x_1 \right], \\ X_{2m}(x_2) = D_m \exp \left[-\beta^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 x_2 \right], \end{cases}$$

where C_n and D_m are arbitrary constants.

Therefore, the functions

$$u_{nm}(x_1, x_2, z_1, z_2) = C_n D_m \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 x_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 x_2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2$$

are the particular solutions for (1)–(2).

Consider the formal series

$$(9) \quad \begin{aligned} u(x_1, x_2, z_1, z_2) = \sum_{n, m=1}^{\infty} C_n D_m \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 x_1 - \right. \\ \left. - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 x_2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2. \end{aligned}$$

The condition (3) becomes

$$u(0, 0, z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2) = \sum_{n, m=1}^{\infty} C_n D_m \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2.$$

$C_n D_m$ are the Fourier coefficients of the function $\varphi(z_1, z_2)$ with respect to the functions

$$(10) \quad \left\{ \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2; n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots \right\}$$

(see [1], Ch. VI, § 69) that is

$$(11) \quad C_n D_m = \varphi_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(s, t) \sin \frac{n\pi}{a} s \sin \frac{m\pi}{b} t \, ds \, dt.$$

We shall prove that series (9) is term by term derivable in

$$(D) \quad \begin{cases} 0 < x_1 \leq T, & 0 < z_1 < a, \\ 0 < x_2 \leq T, & 0 < z_2 < b, \end{cases}$$

and its sum is continuous on D and it satisfies the system (1). Indeed, considering the derivated series:

$$(12) \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial u_{nm}}{\partial x_1} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \left(-\alpha^2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 x_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 x_2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2,$$

$$(13) \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial u_{nm}}{\partial x_2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \left(-\beta^2 \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 x_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 x_2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2,$$

$$(14) \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial z_1^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \left(-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 x_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 x_2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2,$$

$$(15) \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial z_2^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \left(-\frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 x_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 x_2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} z_1 \sin \frac{m\pi}{b} z_2,$$

and taking into account that $|\varphi(z_1, z_2)| \leq M$ for $0 \leq z_1 \leq a$, $0 \leq z_2 \leq b$, from (11) it results:

$$(16) \quad \begin{cases} |\varphi_{n,m}| \leq 4M, \\ \left| \frac{\partial u_{nm}}{\partial x_1} \right| \leq 4M \left(\frac{\alpha\pi}{a} \right)^2 n^2 \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \bar{x}_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \bar{x}_2 \right], \\ \left| \frac{\partial u_{nm}}{\partial x_2} \right| \leq 4M \left(\frac{\alpha\pi}{b} \right)^2 m^2 \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \bar{x}_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \bar{x}_2 \right], \\ \left| \frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial z_1^2} \right| \leq 4M \frac{\pi^2}{a^2} n^2 \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \bar{x}_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \bar{x}_2 \right], \\ \left| \frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial z_2^2} \right| \leq 4M \frac{\pi^2}{b^2} m^2 \exp \left[-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \bar{x}_1 - \beta^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \bar{x}_2 \right], \end{cases}$$

for $x_1 \geq \bar{x}_1$, $x_2 \geq \bar{x}_2$ where $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$ are two fixed constants. From the convergence of the dominant corresponding series it results that the

series (9), (12)–(15) are uniformly and absolutely convergent for $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. The arbitrariness of $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ assures the continuity of the function (9) for $0 < x_1 < T, 0 < x_2 < T, 0 < z_1 < a, 0 < z_2 < b$.

If $\varphi(z_1, z_2)$ is continuous and piecewise smooth it follows that the function (9) is continuous on the boundary of D because we have $|u_{nm}| \leq |\varphi_{nm}|$, for $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 0 \leq z_1 \leq a, 0 \leq z_2 \leq b$.

Remark. This procedure can be easily extended for the system

$$\begin{cases} u_{x_1} = au_{z_1, z_2} + bu_{z_2, z_1}, \\ u_{x_2} = cu_{z_1, z_2} + du_{z_2, z_1}, \end{cases}$$

where a, b, c, d are positive constants.

Received May 26, 1978

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Carslaw H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. Macmillan, London, 1921.
2. Grădinaru N., *Approximating Difference Schemes of Cauchy Problems for Evolution Systems and Approximation of Two-parameter Semigroups of Linear Operators*. An. șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, Ser. I a, Matematică, XIX (1978).
3. Haimovici A., *Sur une généralisation du problème de Cauchy*. Ann. Univ. Marie Curie-Skłodowska, XVII, Sec. A (1963).

SOLUȚIA UNUI SISTEM BI-PARAMETRIC OMOGEN DE EVOLUȚIE

(Rezumat)

Aplicind metoda clasică a separării variabilelor și metoda Fourier se obține sub formă explicită soluția unei probleme Cauchy pentru sisteme de evoluție. Se indică astfel forma concretă a unui semigrup de tipul tratat în [2] și [3].

BAZA DE DATE — SUPORT AL UNUI SISTEM INFORMATIC PENTRU CONDUCERE

DE

VALENTIN HOGEA

1. Introducere. Dezvoltarea economică modernă implică apariția și vehicularea unui volum impresionant de date primare sau prelucrate, necesare pentru fundamentarea deciziilor la diferite nivele.

În aceste condiții prelucrarea manuală a datelor devine inexactă și furnizoare de erori sistematice.

2. Baze de date : definiție, conținut, organizarea fișierelor. **2.1. Definiția unei baze de date.** Prin *bază de date* se înțelege un ansamblu (multime) neredondant¹⁾ de informații utile, dispus într-un sistem (deschis) de fișiere, organizate în așa fel încât să asigure performanțe ridicate de stocare și regăsire și care se folosesc în tranzații cu unul sau mai multe subsisteme informatice.

Modul de organizare a informațiilor în baza de date trebuie să asigure dezvoltarea în timp (extensia) a sistemului de prelucrare automată a datelor și să ofere posibilitatea extragerii operative a unor informații sintetice utile în elaborarea și alegerea unei decizii.

2.2. Conținutul unei baze de date pentru o unitate economică. Pentru a satisface diferitele cerințe de informare operativă și de decizie la diverse nivele de luare a deciziilor, informațiile bazei de date trebuie să acopere întreaga problematică economică.

Se consideră în general, utilă, următoarea organizare a unei baze de date : a) fișier de articole (fișier nomenclator de materii prime materiale, repere, subansamble, etc.) ; b) fișier de operații tehnologice ; c) fișier de structură a produselor ; d) fișier de capacități de producție ; e) fișier de dimensiuni tehnologice ale produselor ; f) fișier de programe de fabricație ; g) fișier de stocuri ; h) fișier de contracte (în calitate de furnizor și beneficiar) ; i) fișier de parteneri în contracte ; j) fișier de personal și retribuirea muncii.

2.3. Clasificarea fișierelor unei baze de date. Avînd în vedere că actualizarea (întreținerea) bazei de date îi dă acesteia funcția de sistem dinamic, este

¹⁾ O informație este neredondantă dacă apare în mulțimea fișierelor de un număr minim de ori, acest fapt neavînd consecințe asupra regăsirii ușoare a ei.

deosebit de importantă alegerea organizării corespunzătoare a informațiilor aferente.

Numim *fișier dens*, un fișier cu următoarea proprietate²⁾: dacă conține două înregistrări corespunzătoare unor chei aflate în relație de ordine, atunci va conține toate înregistrările corespunzătoare cheilor aflate între cele două chei, în sensul relației de ordine stabilite.

Deci se impune organizarea în acces direct a fișierelor dense, și modul de adresare direct, folosind atât la creare, cât și la explorare, un algoritm de randomizare asupra cheii.

Fișierele nedense nu prezintă proprietatea anterioară.

În funcție de dimensiunile lor (numărul de înregistrări fizice) și de solicitarea lor (frecvența de folosire și modul de adresare) se alege organizarea lor.

Dacă numărul de înregistrări este mai mare de 5 000, se va alege organizarea selectivă, asigurând accesul multi-index pentru a realiza un proces de integrare cât mai rapid. În caz contrar se adoptă organizarea secvențială, pentru benzi și discuri magnetice.

Accesul multi-index se realizează prin alocarea unui spațiu de memorare suplimentar pentru păstrarea unor informații de adresare, în scopul micșorării timpului de acces la înregistrare.

Apăre evident „opoziția” dintre timpul de interogare al bazei de date și spațiul de memorare. „Opoziția” se rezolvă, adoptînd o soluție tehnică care cuprinde: a) un sistem de creare și actualizare a bazei de date; b) un sistem de regăsire rapidă a informațiilor.

Actualizarea (ținerea „la zi” a informațiilor) bazei de date este o funcție de bază a sistemului informatic; se urmărește, ca la tranzacțiile făcute cu celelalte fișiere, să se controleze corelațiile dintre ele, refuzînd tranzacțiile neconforme, operînd în final numai modificările admise.

3. Conceptul de sistem informatic care utilizează o bază de date. Orice sistem informatic pentru o unitate economică productivă are ca scop deservirea a două mari categorii de activități ce necesită tranzacții de informații: a) planificarea activității unității; b) urmărirea realizării obiectivelor planificate.

Prima activitate constă în stabilirea obiectivelor pe care unitatea economică trebuie să le realizeze pe termen lung și pe termen scurt.

Dintre problemele ce se pot rezolva printr-un SPAD (sistem de prelucrare automată a datelor), exemplificăm: 1) prospectarea cerințelor pieții interne și externe (probleme de marketing); 2) planificarea producției pe termen lung și pe termen scurt; 3) planificarea livrărilor; 4) planificarea aprovizionării, stabilirea necesarului brut și net de materii prime, de materiale tehnologice și netehnologice; 5) planificarea folosirii capacităților de producție existente și justificarea extinderii lor; 6) planificarea forței de muncă și a utilizării maxime a timpului de lucru; 7) planificarea cheltuielilor de producție, a costurilor și beneficiilor.

²⁾ Noțiunea de densitate este analogă noțiunii de mulțime compactă din topologia matematică.

Dintre problemele aferente activității de urmărire, putem evidenția :
1) urmărirea realizării producției ; 2) urmărirea activității de desfacere (valorificare) a producției realizate ; 3) urmărirea și controlul stocurilor de materii prime, de materiale și a stocului de produse finite, piese de schimb ; 4) urmărirea utilizării forței de muncă și a folosirii timpului de lucru ; 5) urmărirea utilizării capacităților de producție ; 6) urmărirea cheltuielilor de producție efective, analiza costurilor planificate și a abaterilor, urmărirea nivelului beneficiilor ; 7) calculul retribuției muncii (în toate formele de retribuire).

Sistemul informatic trebuie să ofere o prelucrare exactă și rapidă, oferind valoarea exactă a indicatorilor economici urmăriți.

În ce privește activitatea de planificare a producției, putem enumera următoarele activități : a) planificarea producției de bază ; b) planificarea încărcării capacităților de producție pe termen nedefinit și pe termen limitat ; c) programarea operativă a producției ; d) lansarea în fabricație.

4. Restricții în realizarea SPAD ce utilizează o bază de date. Realizarea unui sistem informatic de tipul descris, impune cu necesitate organizarea unei baze de date, în care să fie respectat principiul unicității datelor. Având în vedere conexiunile prestabilite între fișiere și înregistrări, soluția tehnică adoptată trebuie să permită reorganizarea automată a bazei de date (în mod unitar) pe măsură ce se efectuează tranzacții de actualizare asupra fișierelor componente, și posibilitatea unui acces rapid la informațiile utilizate în comun de subsistemele de aplicații.

Din aceste considerente, acceptăm ideea că generarea, organizarea și actualizarea bazei de date este un subsistem informatic prioritar (ca realizare) și comun tuturor activităților din cadrul subsistemelor și aplicațiilor unui sistem informatic.

Pentru obținerea unei eficacități maxime a sistemului informatic, se impun restricții în conceperea și realizarea sa :

1) toate subsistemele pentru aplicații să folosească aceeași bază de date, formată dintr-un număr de fișiere de bază (sau principale) și fișiere variabile (cu durată mică de păstrare) ;

2) rapoartele destinate conducerii operative să se obțină printr-o procedură de interogare a bazei de date ;

3) actualizarea și întreținerea bazei de date să se facă printr-un sistem (modul) de programe independent, care să prelucreze tranzacții în grup, sau individual după sistemul „primul sosit — primul servit“ ;

4) rapoartele ce se editează periodic să fie generate ca rezultat al activității fiecărui subsistem de aplicații, folosind aceeași bază de date, pusă la zi ;

5) subsistemele de aplicații să fie corelate între ele în exploatarea bazei comune de date, prin modulul de întreținere și actualizare a acesteia, prin prelucrarea tranzacțiilor care sînt comune și prin generarea părților comune în rapoarte ;

6) organizarea și generarea bazei de date să fie făcută astfel încît să permită extinderea prin adăugare de subsisteme, de aplicații, fără a fi nevoie de reproiectarea și reorganizarea programelor aferente modulului de întreținere și exploatare a bazei de date existente.

5. Descrierea sumară a fișierelor unei baze de date adecvate subsistemului „Planificarea producției”. 5.1. *Fișierul de articole*. Este un fișier nomenclator de materii prime, materiale, repere, subansamble, ansamble, produse. Este interesant de observat că în fișier sînt stocate toate materiile și materialele tehnologice și netehnologice din circuitul unei unități economice.

În acest fișier nu se iau în considerare relațiile funcționale sau de proces dintre articole (nu ne interesează aici, tot „arborele” de structură al descompunerii unui produs finit în ansamble, subansamble, repere, etc).

Indiferent de poziția lor în arborele de structură al unui produs, convenim să numim elementele acestui fișier drept „articole” (în sensul propriu economic).

Deoarece într-o unitate economică de mărime medie se depozitează aproximativ 100 000 articole, care suferă tranzacții cu frecvență foarte mare (intrări și ieșiri din depozitele permanente, intermediare spre/de la secțiile productive) este deosebit de importantă alegerea unei structuri corespunzătoare a acestui fișier principal cît și o validare corectă a accesului la informații.

Se consideră utilă următoarea structură a fișierului de articole: cod articol, denumire (formată din denumire tehnică și număr desen tehnic), unitate de măsură comercială, unitate de măsură tehnică, cod compus, cod superior, preț de întreprindere, preț intern, preț de import, greutate brută, greutate netă, cont contabil, număr depozit gestionar al articolului.

Prin cod compus înțelegem acel cod articol, care include complet în sens tehnologic articolul dat.

Prin cod superior, înțelegem acel cod articol, care prezintă în descompunerea sa structurală și codul articol specificat.

Modulul de întreținere (actualizare) al fișierului de articole trebuie să cuprindă două părți distincte: actualizarea propriu-zisă și o rutină de creare a fișierului de articole, de organizare selectivă, pentru a fi utilizat eficient în programele de aplicații.

La creare, se va acorda fiecărui articol (prin program), un cod numeric secvențial format din 6 cifre, $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$ (dacă numărul de articole este ≤ 99999 , atunci $C_0 = 0$).

Prin program se va acorda părții numerice, o literă de control, obținută prin următorul procedeu de randomizare:

- 1) se calculează $SUMA = C_1^2 + 2C_2^2 + 3C_3^2 + 5C_4^2 + 7C_5^2$
- 2) se împarte SUMA la valoarea 19 și se obține un rest de valoare $0 \leq REST \leq 18$
- 3) se acordă litera de control, explorînd univoc lista de corespondențe „cifra-literă de control”, după cum urmează:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Z	A	B	C	D	E	G	H	K	L	M	N	Q	R	S	T	V	W	X

La o cerere de modificare sau de ștergere din fișier, se va verifica dacă codul articol este corect și dacă are corespondent în fișier.

În caz afirmativ, numai atunci se va opera tranzacția corespunzătoare.

Pentru crearea fișierului de articole pe disc, organizat selectiv, vom folosi următoarea alegere: vom considera articole sinonime, toate articolele care prezintă aceeași literă de control.

Putem face o analogie cu relația de congruență „modulo m ”: două numere întregi A și B se numesc congruente modulo m unde m este un întreg nenul, dacă prin împărțire la m dau același rest, iar pentru $m = 0$, dacă sînt egale [7].

În cazul nostru fie $A = C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$ și $B = C'_0 C'_1 C'_2 C'_3 C'_4 C'_5$ și SUMA 1 respectiv SUMA 2 calculate conform formulei de randomizare. Putem spune că A și B sînt părți numerice de articole sinonime, dacă sumele SUMA 1 și SUMA 2 sînt congruente modulo 19.

În aceste condiții, casetele fișierului selectiv pe disc sînt clasele de echivalență în raport cu congruența dată.

5.2. *Fișierul de structură*. Este un fișier principal al bazei de date, care arată intercorelarea funcțională a articolelor.

Fiind dat un cod articol, în acest fișier, se regăsesc toate codurile de articole care concură la realizarea sa.

Fișierul de structură împreună cu fișierul de adrese (multi-index) furnizează două situații operaționale distincte: problema lanțului de apartenență și problema lanțului de descompunere

Lanțul de apartenență pentru un cod articol dat indică toate codurile articol, pentru care codul dat joacă rolul de cod component.

Numim „implozie“, totalitatea lanțurilor de apartenență corespunzătoare mulțimii codurilor componente.

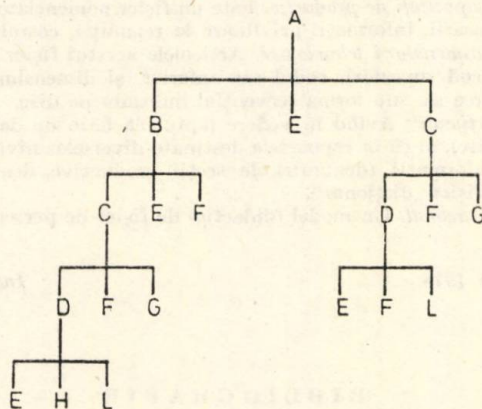
Lanțul de descompunere furnizează pentru un cod compus (cod superior) lista tuturor codurilor componente (coduri inferioare).

Numim „explozie“, totalitatea lanțurilor de descompunere corespunzătoare mulțimii codurilor compus.

Fișierul de structură nu oferă „arborescența“ (în sensul teoriei grafelor) produselor ei descrie de fapt toți sub-arborii structurii produselor respective.

Din aceste motive, clasificarea codurilor articol în „superior“ și „inferior“ este relativă, deoarece un cod inferior într-un arbore, poate fi cod superior pentru un subarbore al său.

Să presupunem că produsul *A* are următoarea alcătuire :



Observăm, că în subarborii *I*, codul *C* apare drept cod component (ca ansamblu al produsului *A*), dar este și cod superior, format din subansamblele *D*, *F*, *G*.

În fișierul de structură vom avea următoarea liniarizare a arborelui de structură :

Cod compus	Cod component
<i>A</i>	<i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>
<i>A</i>	<i>C</i>
<i>B</i>	<i>C</i>
<i>B</i>	<i>E</i>
<i>B</i>	<i>F</i>
<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	<i>F</i>
<i>C</i>	<i>G</i>
<i>D</i>	<i>E</i>
<i>D</i>	<i>H</i>
<i>D</i>	<i>L</i>

lanț de apartenență

lanț de descompunere

5.3. Fișierul de operații tehnologice. Arată „ce, unde și cum“ se prelucurează articolele evidențiind categoriile de lucrări la care sînt supuse acestea, dînd și informații cu privire la forța de muncă necesară.

Structura articolului din fișierul de operații indică la un cod articol dat: operația tehnologică la care va fi supus, caracterul ei, informații cu privire la calificarea și remunerarea necesară categoriei de lucrări, numărul fișei tehnologice, informații privind normele de timp în care se execută.

Apariția fișierului de operații tehnologice este condiționată de existența fișierului de articole, actualizat, precum și de importante modificări funcționale în compartimentul de „Proiectare tehnologică”: a) proiectarea unor noi documente de transpunere a datelor; b) modificări în schema de funcționare; c) introducerea unui sistem unitar de codificare privind 1) compartimentele funcționale și secțiile (atelierele) productive și 2) utilajele, specializările și operațiile tehnologice.

Programului de actualizare al acestui fișier i se atașează în mod logic, programe de creare a fișierului de operații pe disc ținând cont de lanțurile de operații.

Problema care se pune este de a construi (similar cu fișierul de structură al produselor), o „structură”, care să reflecte logic procesul tehnologic, în succesiunea operațiilor la care sînt supuse articolele.

Dat fiind un articol (prin codul său), ne interesează care sînt operațiile la care este supus. Mulțimea lor formează „lanțul” de operații.

Casetele fișierului selectiv de operații tehnologice pe disc vor respecta această „structură”.

5.4. *Fișierul de capacități de producție.* Este un fișier nomenclator de utilaje tehnologice, care indică locul amplasării, informații privitoare la reparații, costul lor, etc.

5.5. *Fișierul de dimensiuni tehnologice.* Articolele acestui fișier indică la un cod articol dat (considerat drept cod superior), codul său inferior și dimensiunea tehnologică proprie. Este utilă folosirea sa sub forma secvențial indexată pe disc.

5.6. *Fișierul „dicționar”* Avînd în vedere faptul că baza de date operează cu date (în majoritatea lor codificate), și că în rapoartele destinate diverselor nivele de decizie este utilă decodificarea unor informații (denumiri de secții productive, denumiri de utilaje, etc.), apare necesitatea unui fișier „dicționar”.

5.7. *Fișierul de personal.* Un model (didactic) de fișier de personal, a fost expus pe larg în [6].

Primită la 14 februarie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Centrul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. Peteanu V., Ungureanu T., Jeican C., *Conducere și informatică*. Ed. „Dacia”, Cluj-Napoca, 1975.
2. * * * *Metodologia de realizare a sistemelor informatice*. ICI, 1978.
3. Pescaru V., Catona I., Duța D., Popescu Cr., Satran I., *Fișiere, baze și bănci de date*. Ed. tehn., Buc., 1976.
4. Pisău Gh., Toma C., Mihăescu I., *Elaborarea și introducerea sistemelor informatice*. Ed. tehn., Buc., 1976.
5. Faur I., *Analiza sistemelor de producție* (I, II, III). Ciclul de instruire participativă pentru analiștii de sistem. Automatica — Management — Calculatoare, vol. 22, 23, 24 A și B, Ed. tehn., Buc., 1976.
6. Hoge V., Pavel N., *Sisteme informatice — Subsistemul Personal - Remunerare*. Tip. Universitatea „Al. I. Cuza”, Iași, 1977.
7. Cucurezeanu I., *Probleme de aritmetică și teoria numerelor*. Ed. tehn., Buc., 1976.

LA BASE DE DONNÉES — SUPPORT D'UN SYSTÈME INFORMATIQUE POUR LA DIRECTION

(Résumé)

On présente le problème des bases des données. On donne la définition et le contenu d'une base des données, une classification des fichiers et on expose la notion de „système informatique” qui utilise une base des données, en donnant les restrictions nécessaires de celui-ci.

En ce qui concerne les fichiers qui sont d'organisation directe, on prouve l'analogie entre la notion de „congruence modulo- k ” et l'ensemble des articles synonymes.

SUR UNE DÉFORMATION REMARQUABLE DU SYSTÈME DES GÉNÉRATRICES D'UN CÔNE DU SECOND DEGRÉ ET UN PROBLÈME DE GÉODÉSIE

PAR

W. WUNDERLICH

0. On étudie une déformation qui conserve la longueur des génératrices tandis que la conique de base varie de manière affine dans un système homofocal, ses points décrivant les coniques homofocales du système orthogonal. Cette transformation, indépendante du sommet, peut être appliquée pour le développement du cône, mais elle a surtout une certaine importance pour un problème de trilatération dans le domaine de la géodésie.

1. Considérons un cône elliptique, déterminé par sa base

$$(1.1) \quad (k) \quad x = c \operatorname{ch} v \cos u, \quad y = c \operatorname{sh} v \sin u, \quad z = 0 \quad (c, v = \text{const})$$

et le sommet $B(X, Y, Z)$. La distance r d'un point $A(x, y, 0)$ de la base au sommet B se calcule par la formule

$$(1.2) \quad r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2c(X \operatorname{ch} v \cos u + Y \operatorname{sh} v \sin u) + \frac{c^2}{2}(\operatorname{ch} 2v + \cos 2u).$$

On voit que les génératrices de même longueur r et en distribution égale $r(u)$ se trouvent non seulement sur le cône donné, mais aussi sur une infinité d'autres cônes elliptiques de même excentricité $c > 0$, si les paramètres additionnels v, X, Y, Z satisfont aux conditions

$$(1.3) \quad X \operatorname{ch} v = a, \quad Y \operatorname{sh} v = b, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2v = C,$$

où a, b, C sont des constantes. La formule (1.2) prend alors la forme

$$(1.4) \quad r^2 = C - 2c(a \cos u + b \sin u) + \frac{c^2}{2} \cos 2u.$$

2. Pour une interprétation visuelle on peut imaginer un modèle, où quelques génératrices AB sont réalisées par des tiges rigides ayant une articulation commune au sommet B . Un changement continu du paramètre v induit une déformation continue du modèle, au cours de laquelle l'ellip-

se (k) (1.1) varie dans un système homofocal défini par l'excentricité constante c . Chaque point de base $A \in (k)$ ($u = \text{const}$) parcourt une hyperbole

$$(2.1) \quad (l) \quad x = c \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = c \sin u \operatorname{sh} v, \quad z = 0 \quad (c, u = \text{const.}),$$

possédant aussi l'excentricité c . Le système homofocal des ellipses (k) et des hyperboles (l) constitue un réseau orthogonal bien connu en relation avec la transformation conforme $x + iy = \cos(u - iv)$. Le fait que la déformation décrite ne soit pas gênée par le joint commun au sommet B n'était pas évident.

La trajectoire (q) du sommet $B(X, Y, Z)$ au cours de la déformation du cône est définie par (1.3) et représentée en forme paramétrique par

$$(2.2) \quad (q) \quad X = \frac{a}{\operatorname{ch} v}, \quad Y = \frac{b}{\operatorname{sh} v}, \quad Z^2 = C - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2v - \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 v} - \frac{b^2}{\operatorname{sh}^2 v}.$$

En général, c'est à dire si $ab \neq 0$, (q) est une courbe gauche algébrique d'ordre 12, base propre d'un faisceau de surfaces d'ordre 4 :

$$(2.3) \quad (\lambda X^2 + \mu Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 - C) - \frac{c^2}{2}(\lambda X^2 - \mu Y^2) + c^2(\lambda a^2 + \mu b^2) = 0.$$

La projection orthogonale de q sur le plan base $Z = 0$ est une quartique unicursale $(a/X)^2 - (b/Y)^2 = 1$. Dans le cas particulier $a \neq 0, b = 0$ la trajectoire (q) du sommet appartient au plan de symétrie $Y = 0$ et forme un des deux ovales égaux de la quartique circulaire

$$(2.4) \quad X^2 \left(X^2 + Y^2 - C - \frac{c^2}{2} \right) + a^2 c^2 = 0.$$

La situation est semblable pour $a = 0, b \neq 0$. Dans le cas $a = b = 0$ le sommet B varie sur l'axe principal $X = Y = 0$.

3. Au cours de sa déformation le cône prend deux formes plates (réelles), caractérisées par $Z = 0$. Pour les trouver on a, en posant $\operatorname{ch} 2v = \xi$, à résoudre l'équation cubique

$$(3.1) \quad \eta = c^2 \xi + \frac{4a^2}{\xi + 1} + \frac{4b^2}{\xi - 1} - 2C = 0.$$

En consultant le graphe de la fonction $\eta(\xi)$ on voit que l'équation $\eta = 0$ a trois racines réelles, mais l'une est contenue dans l'intervalle $-1 < \xi < 1$ et donc est à écarter. Les positions limites B_1 et B_2 du sommet, appartenant aux autres racines de (3.1), se trouvent l'une à l'intérieur de l'ellipse correspondante (k_1), l'autre à l'extérieur de (k_2). Dans les cas de symétrie simple $a = 0$ ou $b = 0$ l'équation (3.1) se réduit à une équation quadratique, dans le cas $a = b = 0$ on a une équation linéaire.

On pourrait se servir des formes aplaties pour le développement du cône. Ceci se fait approximativement au moyen d'une pyramide inscrite à un nombre suffisant d'arêtes assez voisines. Les longueurs nécessaires de ces arêtes peuvent alors être prises en se servant du disque (k_1, B_1) par

exemple comme d'un diagramme polaire. Évidemment ce procédé n'est praticable avec avantage que dans les cas de symétrie, surtout pour le cône circulaire oblique ($c = 0$), pour lequel l'usage a été décrit en détail dans [5]. Dans tous ces cas la méthode peut être exécutée sans calcul, par une voie purement constructive.

4. Pour adapter l'exposé précédent à un cône de base hyperbolique, il suffit d'échanger les variables u et v dans (1.1).

Dans le cas parabolique on mettra au lieu de (1.1) les équations

$$(4.1) \quad x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = 0,$$

qui définissent un réseau orthogonal constitué de paraboles homofocales (k) ($v = \text{const}$) et (l) ($u = \text{const}$), en relation avec la transformation conforme $x + iy = (u + iv)^2$. Pour la distance r d'un point $A \in (k)$ au sommet $B(X, Y, Z)$ on a

$$(4.2) \quad r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = u^4 - 2u^2(X - v^2) - 4u vY + (X^2 + Y^2 + Z^2 + 2v^2 X + v^4).$$

On voit par cette formule que les génératrices de même longueur r et en distribution égale $r(u)$ se trouvent sur une infinité à un paramètre de cônes paraboliques, dont les données v, X, Y, Z sont liées par les conditions

$$(4.3) \quad X - v^2 = a, \quad vY = b, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + 2v^2 X + v^4 = C,$$

a, b, C étant des constantes. La formule (4.2) prend alors la forme

$$(4.4) \quad r^2 = u^4 - 2au^2 - 4bu + C.$$

Au cours de la déformation du cône, induite par variation du paramètre v , la parabole base (k) se change dans le cadre d'un système homofocal, tandis que ses points décrivent les paraboles (l) ($u = \text{const}$) du système orthogonal. Le sommet B du cône se déplace sur la courbe

$$(4.5) \quad (q) \quad X = v^2 + a, \quad Y = \frac{b}{v}, \quad Z^2 = C - (2v^2 + a)^2 - \frac{b^2}{v^2}.$$

Il s'agit d'une sextique gauche dans le cas général $b \neq 0$, située sur l'ellipsoïde de révolution

$$(4.6) \quad (2X - a)^2 + Y^2 + Z^2 = C.$$

Elle se projette sur le plan base $Z = 0$ comme cubique unicursale $(X - y)Y^2 = b^2$, parcourue deux fois. Dans le cas de symétrie $b = 0$ la trajectoire (q) se réduit à l'ellipse

$$(4.7) \quad (2X - a)^2 + Z^2 = C, \quad Y = 0,$$

méridienne de la surface (4.6).

La détermination des formes aplaties du cône, caractérisées par $Z = 0$, conduit aussi à une équation cubique dans le cas général et à une équation quadratique dans le cas de symétrie.

5. En géodésie moderne on se sert de plus du mesurage électronique des distances. Ainsi il devient possible de remplacer la méthode classique de triangulation par une „trilatération“ qui renonce complètement au mesurage usuel des angles. En relation avec cette tendance K. Killian [2] a posé la question suivante : en mesurant de m points de base A_i ($i = 1, \dots, m$) à n points de but B_j ($j = 1, \dots, n$) toutes les distances $A_i B_j = r_{ij}$, pour quelles valeurs de m et n est-il possible (sans connaître la position des A_i) de déterminer la configuration complète des $m + n$ points A_i et B_j ? La réponse dépend de l'équation diophantienne $mn = 3(m + n) - 6$ et dit $m = 4, n = 6$ ou $m = 6, n = 4$. Pour des valeurs plus grandes le problème devient surdéterminé en général, ainsi que déjà pour $m = n = 5$.

Certainement le problème de trouver la configuration des dix points $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_6$ au moyen des 24 distances r_{ij} est algébrique, mais d'un degré élevé, jusqu'ici inconnu [3]. Néanmoins on peut construire un modèle composé des 24 tiges $A_i B_j$ en échelle convenable ; malgré ses 10 articulations le système sera rigide en général, remarque faite déjà par R. Bricard [1]. Sous certaines conditions cependant le modèle sera mobile et permettra des déformations du moins infinitésimales. Une condition suffisante pour une telle configuration critique a été signalée par K. Killian et P. Meissl [2] : le système articulé possède une déformabilité au moins infinitésimale, si les dix points appartiennent à une quadrique („surface dangereuse“). On peut démontrer que les points A_i et B_j peuvent être multipliés sans borne, si seulement tous sont situés sur la même quadrique [3]. Chez R. Bricard [1] on trouve aussi un exemple particulier, distingué par mobilité finie et continue à un paramètre.

Une autre situation critique se présente, si les quatre points de base $A_1, \dots, A_4$ sont coplanaires : les points de but B_j , en nombre quelconque $n \geq 6$, peuvent être distribués arbitrairement dans l'espace. Cependant, la déformabilité infinitésimale dérivée dans [2] et [3], en vérité n'est que le germe d'une mobilité finie et continue à deux paramètres. Ce fait surprenant résulte immédiatement des développements précédents : faisant passer par les quatre points A_i une ellipse (k) (1.1), et tenant compte de la circonstance que la déformation à un paramètre considérée dans la Section 1 est indépendante du sommet B , cette déformation peut être exécutée simultanément pour un nombre quelconque de points B_j . Puisqu'on a à sa disposition tout un faisceau de coniques (k) passant par $A_1, \dots, A_4$, on a un paramètre de plus.

S'il y a encore un cinquième point de base dans le plan des autres, il n'y existe qu'une seule conique (k) passant par $A_1, \dots, A_5$. La déformation à un paramètre du système spatial, possible toujours sans égard au nombre et à la distribution des points de but B_j , est précisément celle qui a été décrite plus haut ; pour le cas d'une ellipse (k) dans la Section 1, pour les cas d'une hyperbole ou d'une parabole dans la Section 4. Le cas singulier d'une conique décomposée en deux droites s'ajoute sans difficulté : la déformation du système est produite par une rotation des droites autour de leur point d'intersection, changeant l'angle qu'elles enferment.

Des points de base additionnels $A_6, \dots, A_n$, sont admissibles en nombre illimité, s'ils se trouvent aussi sur la conique critique (k). La déformation continue à un paramètre du système articulé reste inaltérée. Néanmoins

le degré de liberté peut augmenter, si les points de but B_j ont une position spéciale. C'est le cas chez un exemple de R. Bricard [1], où les B_j (en nombre quelconque) sont situés sur la conique focale de (k) ; le degré de liberté monte alors à 3 [4].

Reçue le 30 Mars 1976

Université Technique,
Vienne, Autriche

BIBLIOGRAPHIE

1. Bricard R., *Sur des systèmes articulés*. Nouv. Ann. Math., 79, 395—400 (1920).
2. Killian K., Weissl P., *Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Orte*. D. Geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss., A/61, 65—72 (1969).
3. Wunderlich W., *Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke* (II). Z. Angew. Math. Mech. (à paraître).
4. Wunderlich W., *Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke*. Sitzgsber. Osterr. Akad. Wiss. (à paraître).
5. Wunderlich W., *Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels*. Elem. Math. (à paraître).

ASUPRA UNEI DEFORMĂRI REMARCABILE A SISTEMULUI DE GENERATORI AL UNUI CON DE ORDINUL DOI ȘI O PROBLEMĂ DE GEODEZIE

(Rezumat)

Se studiază o deformare care păstrează lungimea generatoarelor în timp ce conica de bază variază în mod afin într-un sistem homofocal, punctele sale descriind conicele homofocale ale sistemului ortogonal. Deformația prezintă importanță pentru o problemă de trilaterație în geodezie.

PROCEDEE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ FOLOSITE LA EVALUAREA PRECIZIEI VECTORULUI DEPLASĂRII CONSTRUCȚIILOR

DE

GH. NISTOR și ANETA BRAIER

După determinarea vectorului deplasării orizontale a punctelor de control, de pe construcția observată, prin măsurări geodezice de precizie [1] și evaluarea preciziei rezultatelor compensării prin metoda celor mai mici pătrate [2], în lucrarea de față se prezintă o evaluare mai completă a preciziei vectorului deplasării cu ajutorul statisticii matematice.

Deoarece numărul de măsurări efectuate este relativ mic, pentru a avea garanția că erorile comise la înlocuirea mărimilor adevărate ale vectorilor deplasării cu mărimile cele mai probabile, obținute prin compensare, nu depășesc o anumită limită, este recomandabilă folosirea metodei intervalelor de încredere [3], [4] și, în special, a domeniilor de încredere.

Determinându-se vectorii deplasării s-a urmărit obținerea unor mărimi care, într-o oarecare măsură, să fie cât mai apropiate de valorile reale. Cum nu este posibilă găsirea valorilor reale, se stabilesc niște limite în intervalul cărora, cu o anumită probabilitate, se poate afirma că se află valorile mărimilor reale ale vectorilor deplasării orizontale. Aceste limite definesc intervalele și domeniile de încredere.

Determinarea intervalului de încredere care acoperă valoarea teoretică a erorii unității de pondere, σ , se face astfel încît, probabilitatea de a nu acoperi mărimea acestei erori, la dreapta și la stînga, să fie egală. Mărimea acestui interval de încredere asimetric, pentru o probabilitate apropiată de unitate, este [4], [5]

$$(1) \quad \gamma_1 m_0 \leq \sigma \leq \gamma_2 m_0,$$

unde m_0 este eroarea unității de pondere, obținută în urma compensării [2], iar coeficienții γ_1 și γ_2 sînt dați de expresiile

$$(2) \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_{P_1}^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_{P_2}^2}}.$$

În acest caz este satisfăcută condiția

$$(3) \quad P \{ \gamma_1 m_0 \leq \sigma \leq \gamma_2 m_0 \} = P_2 - P_1 = P.$$

Dacă se notează $1 - P = q$, mărimea obținută reprezintă nivelul de încredere al estimației considerate și reprezintă probabilitatea ca parametrul studiat σ să se găsească în afara intervalului de încredere determinat. Între probabilitățile P_1 , P_2 și q există relațiile

$$(4) \quad P_1 = \frac{q}{2}, \quad P_2 = 1 - \frac{q}{2}.$$

Coeficienții γ_1 și γ_2 se extrag din tabele în funcție de probabilitatea P și de numărul gradelor de libertate $n - k$.

Intervalul de încredere cu care acoperă mărimea vectorului deplasării orizontale L_j [1] cu o anumită probabilitate P , apropiată de unitate, este [4]

$$(5) \quad L_j - \gamma m_{L_j} \leq \bar{L}_j \leq L_j + \gamma m_{L_j},$$

în așa fel ca să fie satisfăcută condiția

$$(6) \quad P \{L_j - \gamma m_{L_j} \leq \bar{L}_j \leq L_j + \gamma m_{L_j}\} = P\{|t| \leq \gamma\} = P,$$

unde: L_j — mărimea vectorului deplasării orizontale a punctului de control j ($j = 1, 2, \dots, N$); m_{L_j} — eroarea medie pătratică a vectorului deplasării; γ — mărime extrasă din tabel în funcție de probabilitatea de încredere P și de numărul gradelor de libertate $n - k$.

În calculele efectuate, cu cât intervalul de încredere este mai mic și probabilitatea P este mai mare, cu atât este mai mare precizia de determinare a vectorului deplasării.

Lungimea intervalului de încredere (5) care acoperă mărimea elementului determinat cu o anumită probabilitate P , se mai poate scrie și sub forma

$$(7) \quad \Delta_j = \pm \gamma \left[P, \frac{1}{n - k} \right] m_{L_j}.$$

Pentru o probabilitate dată, lungimea intervalului de încredere este invers proporțională cu numărul gradelor de libertate $n - k$, așa cum apare și din fig. 1.

Practic, acest interval poate fi oricât de mic, conform preciziei urmărite, acest lucru obținându-se prin mărirea numărului gradelor de libertate $n - k$. Totuși, trebuie observat că pe măsură ce se mărește numărul gradelor de libertate, influența măririi sale asupra lungimii intervalului Δ_j este din ce în ce mai mică. Astfel, în cazul când $n - k > 4$, creșterea intervalului este neglijabilă.

În același timp trebuie arătat că, eroarea medie pătratică a vectorului deplasării, m_{L_j} , depinde de eroarea unității de pondere m_0 , iar mărimea acestuia din urmă depinde de precizia cu care s-au efectuat măsurările pe teren și de numărul gradelor de libertate.

În problema cercetată, numărul gradelor de libertate este dat de surplusul de date din operația de compensare și reprezintă diferența dintre numărul relațiilor de deformare n și numărul necunoscutele k .

În baza celor arătate rezultă că pentru obținerea unui interval de încredere cât mai scurt, care să acopere mărimea elementului determinat cu o anumită probabilitate, se va urmări nu atât creșterea exagerată a numărului gradelor de libertate, deci a surplusului de date, cât și mărirea preciziei de măsurare a unghiurilor orizontale în toate ciclurile de observații, care reprezintă influența fundamentală asupra preciziei rezultatelor obținute.

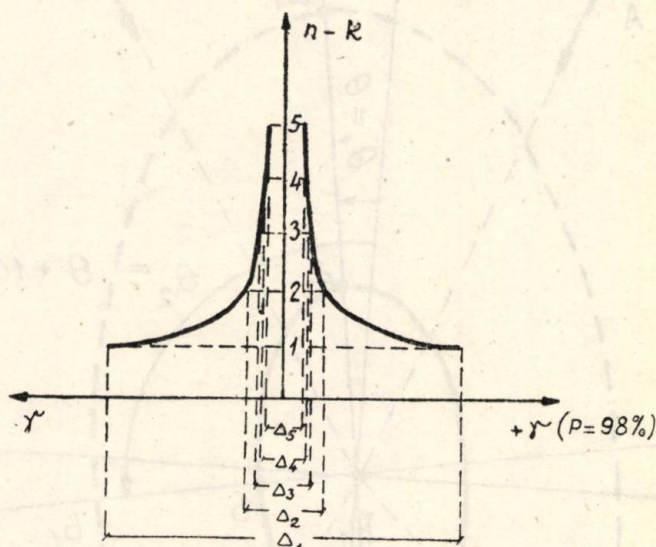


Fig. 1. — Lungimea intervalului de încredere funcție de numărul gradelor de libertate.

Deoarece vectorul deplasării orizontale L , a punctului de control este funcție de doi parametri, componentele ΔX , și ΔY , este mai corect să se folosească la aprecierea statistică a rezultatelor domeniul de încredere reprezentat de cercul de încredere al erorilor și, mai ales, de elipsa de încredere a erorilor.

Pentru aceasta se procedează astfel: se calculează mai întâi mărimea intervalului de încredere pentru eroarea unității de pondere prin înmulțirea valorii acesteia cu coeficienții γ_1 și γ_2 , extrași din tabel în funcție de probabilitatea aleasă P și numărul gradelor de libertate $n - k$,

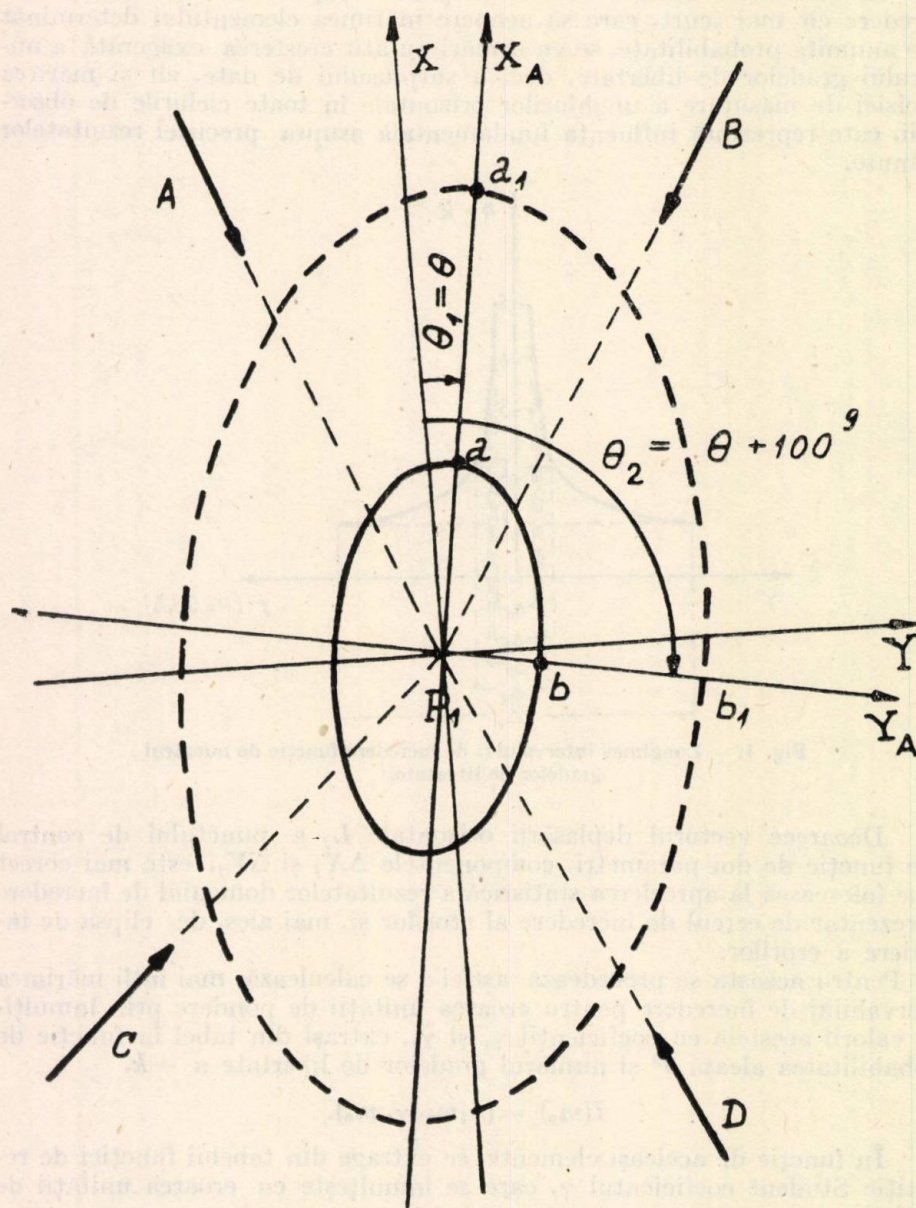
$$(8) \quad I(m_0) = (\gamma_1 m_0, \gamma_2 m_0).$$

În funcție de aceleași elemente, se extrage din tabelul funcției de repartiție Student coeficientul γ , care se înmulțește cu eroarea unității de pondere,

$$(9) \quad m_\gamma = \gamma m_0,$$

după care se vor calcula erorile medii pătratice de încredere ale componentelor vectorului deplasării orizontale cu formula [2]

$$(10) \quad M_{\gamma x}^2 = m_\gamma^2 Q_{kk}.$$



Sc. 100:1

Fig. 2. — Elipsa erorilor : $\overline{P_1 a} = A$, $\overline{P_1 b} = B$ (linia continuă) și elipsa de încredere : $\overline{P_1 a_1} = A_r$, $\overline{P_1 b_1} = B_r$ (linia întreruptă).

Erorile medii pătratice de încredere ale componentelor vectorului deplasării orizontale a punctului de control j , sînt exprimate de relațiile [2]

$$(11) \quad m_{\gamma \Delta x_j} = \pm m_{\gamma} \sqrt{Q_{x_j x_j}}, \quad m_{\gamma \Delta y_j} = \pm m_{\gamma} \sqrt{Q_{y_j y_j}},$$

iar eroarea medie pătratică de încredere a vectorului deplasării și care reprezintă raza cercului de încredere al erorilor, este

$$(12) \quad m_{\gamma L_j} = m_{\gamma} \sqrt{Q_{x_j x_j} + Q_{y_j y_j}}.$$

Elementele elipsei de încredere a erorilor sînt date de formulele [2]:

$$(13) \quad A_{\gamma j} = \pm m_{\gamma} \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{x_j x_j} + Q_{y_j y_j} + q_j)},$$

$$(14) \quad B_{\gamma j} = \pm m_{\gamma} \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{x_j x_j} + Q_{y_j y_j} - q_j)},$$

$$(15) \quad \operatorname{tg} 2\theta_{\gamma j} = \frac{2Q_{x_j y_j}}{Q_{x_j x_j} - Q_{y_j y_j}}.$$

Analiza formulelor de mai sus arată că elipsele de încredere diferă ca mărime de elipsele erorilor medii pătratice, dar au aceleași orientări.

În acest fel se poate stabili pentru fiecare punct de control, de pe construcția observată, domeniul de încredere în interiorul căruia, cu o anumită probabilitate, se află mărimea reală a vectorului deplasării orizontale.

În fig. 2 se prezintă grafic, la scara 100 : 1, elipsa erorilor și elipsa de încredere a erorilor, aceasta din urmă constituind domeniul de încredere în care se află mărimea reală a vectorului deplasării orizontale a punctului de control P_1 de pe construcția observată.

Primită la 18 iunie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Laboratorul de topografie și
fotogrammetrie

și
Catedra de geometrie descriptivă
și desen

BIBLIOGRAFIE

1. Nistor Gh., Braier A., *Determinarea vectorului deplasării construcțiilor prin măsurări indirecte ponderate*. Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3—4, s. I (1977).
2. Nistor Gh., Braier A., *Evaluarea preciziei vectorului deplasării construcțiilor determinat prin măsurări indirecte ponderate*. Bul. Inst. polit. Iași, XXIV (XXVIII), 1—2, s. I (1978).
3. Ceașescu D., *Tratarea statistică a datelor analitice*. Ed. tehn., Buc., 1973.
4. Ciucu G., Craiu V., *Introducere în teoria probabilităților și statistică matematică*. E. D.P., Buc., 1971.
5. Tiron M., *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*. Ed. tehn., Buc., 1972.

UTILISATION DES PROCÉDÉS DE LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE À L'ESTIMATION DE LA PRÉCISION DU VECTEUR DÉPLACEMENT DES CONSTRUCTIONS

(Résumé)

On présente la technique d'utilisation des intervalles et des domaines de confiance pour estimer la précision du vecteur déplacement horizontal des constructions, déterminé à l'aide des mesures indirectes pondérées.

RELAȚIA FUNDAMENTALĂ A AXONOMETRIEI ORTOGONALE MULTIDIMENSIONALE

DE

MARIA BORȘ, CARMEN MARICA și MARIA VIAȘU

1. Introducere. În prezenta notă se dau demonstrații, folosind metodele geometriei analitice, pentru relația fundamentală a axonometriei ortogonale tridimensionale și generalizarea ei pentru cazul axonometriei ortogonale multidimensionale.

Cu toate că această metodă implică uneori calcule laborioase, ea este utilă pentru stabilirea rezultatelor în spații de dimensiuni mai mari ca trei.

În [1] și [2] se dau demonstrații elementare ale relației fundamentale a axonometriei ortogonale tridimensionale și se pun în evidență hiperplanul axonometric pentru cazul axonometriei ortogonale multidimensionale, dar nu este stabilită relația fundamentală, care este o generalizare firească a celei în cazul tridimensional. Importanța acestei generalizări constă și în faptul că ea dă posibilitatea să se constate dependența de dimensiunea spațiului a sumei patratelor cosinilor care intervin în relația fundamentală.

Toate noțiunile utilizate în această notă cu privire la geometria euclideană tridimensională sau multidimensională se găsesc tratate în [3].

2. O demonstrație analitică a relației fundamentale a axonometriei ortogonale tridimensionale. Raportăm spațiul geometric la reperul ortonormat canonic (O, i, j, k) , față de care considerăm planul axonometric (P) de ecuație generală

$$(P) \quad bcx + acy + abz = abc,$$

unde a, b, c sînt numere reale strict pozitive care reprezintă „tăieturile” planului axonometric (P) pe dreptele suport ale axelor reperului canonic, deoarece intersecțiile planului axonometric (P) cu aceste drepte sînt respective punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

Determinăm proiecția ortogonală O' a originii O a spațiului pe planul axonometric (P) , intersectînd normala prin O la planul (P) , care are ecuațiile generale

$$acx - bcy = 0, \quad abx - bcx = 0,$$

cu planul (P); obținem O' ($A^{-1}ab^2c^2, A^{-1}a^2bc^2, A^{-1}a^2b^2c$) unde $A = (bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2$.

Considerăm vectorii liberi

$$\vec{AO} = -ai, \quad \vec{BO} = -bj, \quad \vec{CO} = -ck,$$

$$\vec{AO'} = A^{-1}a^2(-a(b^2 + c^2)i + bc^2j + b^2ck),$$

$$\vec{BO'} = A^{-1}b^2(ac^2i - b(a^2 + c^2)j + a^2ck),$$

$$\vec{CO'} = A^{-1}c^2(ab^2i + a^2bj - c(a^2 + b^2)k)$$

și calculăm normele lor care sînt date de egalitățile

$$\|\vec{AO}\| = a, \quad \|\vec{BO}\| = b, \quad \|\vec{CO}\| = c,$$

$$\|\vec{AO'}\| = A^{-\frac{1}{2}} a^2 (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\vec{BO'}\| = A^{-\frac{1}{2}} b^2 (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\vec{CO'}\| = A^{-\frac{1}{2}} c^2 (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cosinii unghiurilor neorientate $\hat{A} = \widehat{(\vec{AO}, \vec{AO'})}$, $\hat{B} = \widehat{(\vec{BO}, \vec{BO'})}$, $\hat{C} = \widehat{(\vec{CO}, \vec{CO'})}$ sînt dați de egalitățile.

$$\cos \hat{A} = a^{-1} \|\vec{AO'}\|, \quad \cos \hat{B} = b^{-1} \|\vec{BO'}\|, \quad \cos \hat{C} = c^{-1} \|\vec{CO'}\|$$

și cu ajutorul expresiilor acestora găsim relația fundamentală a axonometriei ortogonale tridimensionale:

$$\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 2.$$

3. Relația fundamentală a axonometriei ortogonale n -dimensionale. Considerăm un spațiu euclidian n -dimensional raportat la reperul ortonormat canonic ($O, i_1, \dots, i_n$), față de care considerăm hiperplanul axonometric (H) de ecuație generală

$$(H) \quad a_2 \dots a_n x_1 + \dots + a_1 \dots a_{n-1} x_n = a_1 \dots a_n,$$

unde $a_1, \dots, a_n$ sînt numere reale strict pozitive care reprezintă „tăieturile” hiperplanului (H) pe dreptele suport ale axelor reperului canonic, deoarece intersecțiile hiperplanului axonometric (H) cu aceste drepte sînt punctele $A_1(a_1, \dots, 0), \dots, A_n(0, \dots, a_n)$.

Determinăm proiecția ortogonală O' a originii O a spațiului pe hiperplanul axonometric (H), intersectînd normala prin O la hiperplanul (H), care are ecuațiile parametrice

$$x_1 = a_2 \dots a_n t, \quad \dots, \quad x_n = a_1 \dots a_{n-1} t, \quad t \in R,$$

cu hiperplanul (H) ; obținem pentru t valoarea reală $t = A^{-1} a_1 \dots a_n$ unde $A = (a_2 \dots a_n)^2 + \dots + (a_1 \dots a_{n-1})^2$, corespunzătoare punctului O' de pe normală și deci

$$O' (A^{-1} a_1 (a_2 \dots a_n)^2, \dots, A^{-1} a_n (a_1 \dots a_{n-1})^2).$$

Pentru k luînd valorile $1, \dots, n$ considerăm vectorii liberi

$$\vec{A_k O} = -a_k \vec{i}_k,$$

$$\vec{A_k O'} = A^{-1} a_k^2 (a_1 (a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n)^2 \vec{i}_1 + \dots$$

$$\dots + a_{k-1} (a_1 \dots a_{k-2} a_{k+1} \dots a_n)^2 \vec{i}_{k-1} -$$

$$- a_k ((a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n)^2 + \dots + (a_1 \dots a_{k-2} a_{k+1} \dots a_n)^2 +$$

$$+ (a_1 \dots a_{k-1} a_{k+2} \dots a_n)^2 + \dots + (a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{n-1})^2) \vec{i}_k +$$

$$+ a_{k+1} (a_1 \dots a_{k-1} a_{k+2} \dots a_n)^2 \vec{i}_{k+1} + \dots + a_n (a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{n-1})^2 \vec{i}_n)$$

și calculăm normele lor care sînt date de egalitățile

$$\|\vec{A_k O}\| = a_k,$$

$$\|\vec{A_k O'}\| = A^{-\frac{1}{2}} a_k^2 ((a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n)^2 + \dots$$

$$\dots + (a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{n-1})^2)^{\frac{1}{2}}$$

pentru k luînd valorile $1, \dots, n$.

Cosinii unghiurilor neorientate $\hat{A}_k = \angle(\vec{A_k O}, \vec{A_k O'})$, $k = 1, \dots, n$, sînt dați de egalitățile

$$\cos \hat{A}_k = a_k^{-1} \|\vec{A_k O'}\|, \quad k = 1, \dots, n,$$

și cu ajutorul expresiilor acestora găsim relația fundamentală a axonometriei ortogonale n -dimensionale:

$$\cos^2 \hat{A}_1 + \dots + \cos^2 \hat{A}_n = n - 1.$$

Conform rezultatului obținut putem enunța teorema care pune în evidență relația fundamentală a axonometriei ortogonale n -dimensionale sub forma următoare: dacă A_k , $k = 1, \dots, n$ sînt punctele de intersecție ale unui hiperplan (H) cu dreptele suport ale axelor reperului ortonormat canonic al unui spațiu afin euclidian de dimensiune n și O' este proiecția ortogonală pe hiperplanul (H) a originii O a spațiului, atunci suma patratelor cosinilor

unghiurilor neorientate $\angle(\vec{A_k O}, \vec{A_k O'})$ depinde de dimensiunea spațiului și este egală cu dimensiunea $n - 1$ a hiperplanului axonometric (H) .

Primită la 1 ianuarie 1978

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geometrie descriptivă și desen

BIBLIOGRAFIE

1. Botez M. Șt., Mirescu N. P., *Axonometrie*. Ed. tehn., Buc., 1970.
2. Глазунов Э. А., Четверухин И. Ф., *Аксонометрия*. М., 1953.
3. Cruceanu V., *Elemente de algebra liniară și geometrie*. E.D.P., Buc., 1973.

LA RELATION FONDAMENTALE DE L'AXONOMÉTRIE ORTHOGONALE
MULTIDIMENSIONNELLE

(Résumé)

Cette Note établit que la somme des carrés des cosinus des angles nonorientés que les axes du repère font avec les axes axonométriques dépend de la dimension n de l'espace et est égale à $n - 1$.

PROIECȚIA AXONOMETRICĂ CA TRANSFORMATĂ AFINĂ A EPURII MONGE

DE

I. RUSU, CARMEN MARICA, CORNELIA EFTIMESCU și MARIANA VASILACHE

1. Introducere. Este cunoscut că epura Monge este alcătuită din cele două sau trei proiecții ortogonale ale unui obiect dat pe planele triedrului de proiecție.

Proiecția ortogonală sau oblică a aceluiași obiect pe un plan diferit ca poziție de planele triedrului de proiecție, reprezintă transformata epurii Monge (cunoscută, de fapt, sub denumirea de proiecție axonometrică).

Cum între această proiecție și una din proiecțiile ortogonale ale obiectului considerat se poate stabili o corespondență afină, aceasta conduce la construcția proiecției pe un plan $[P]$ a obiectului considerat și constituie obiectul lucrării de față.

2. Se consideră în reperul Monge planul $[ABC] \equiv [P]$ astfel încît : $(Ox) \cap [P] = A$; $(Oy) \cap [P] = B$ și $(Oz) \cap [P] = C$. Urmele acestui plan sînt : $(AB) \equiv (Ph)$; $(AC) \equiv (Pv)$ și $(BC) \equiv (Pl)$. Din epura Monge rezultă că cele trei urme sînt date în adevărata lor lungime astfel : $P_h = \overline{AB}$ $P_v = \overline{AC}$ și $P_l = \overline{BC}$. Aceasta arată că este posibil să se construiască triunghiul axonometric, ca un triunghi cu laturi cunoscute. Astfel urma $P_h = Ph_0 \equiv (Ox)$.

În felul acesta, prin trasarea arcului de cerc de rază AB și cu centrul în A , se aduce urma orizontală să se confunde cu axa (Ox) . Cel de al treilea vîrf $C_1 = (Pv_0) \cap (Pl_0)$. Dar $Pl_0 = Pl = \overline{BC} = \overline{B_1 C_1}$ (fig. 1).

În acest mod triunghiul axonometric $AB_1 C_1$ a ajuns în planul vertical de proiecție. Axele axonometrice fiind înălțimi în triunghiul axonometric, se duce prin fiecare vîrf al său perpendiculara pe latura afină. Aceasta are ca urmare : $A \in (O_1 x_1) \perp (B_1 C_1) \equiv Pl_0$; $B_1 \in (O_1 y_1) \perp (AC_1) \equiv Pv_0$ și $C_1 \in (O_1 z_1) \perp (AB_1) \equiv Pv_0$.

Evident, punctul comun al acestor axe este originea lor, adică proiecția axonometrică a originii O a triedrului ortogonal. Prin urmare iată că s-a obținut simplu proiecția axonometrică ortogonală a unui punct din spațiu. În proiecția Monge s-a considerat originea O și proiectanta sa (δ, δ') , care se intersectează cu planul $[P]$ în punctul (O_1, O_1') . De fapt, proiecțiile δ, δ' și δ'' nu sînt decît axele axonometrice figurate în epura Monge, astfel că : $\delta \equiv (O_1 z_1)$ și $\delta' \equiv (O_1 y_1)$, iar acestea, ca înălțimi în triunghi, au picioa-

rele lor pe laturile (urmele) respective în (k, k') și (l, l') . Punctele menționate sînt aduse pe laturile triunghiului axonometric din noua sa poziție prin rotații corespunzătoare și indicate mai sus la construcția acestuia.

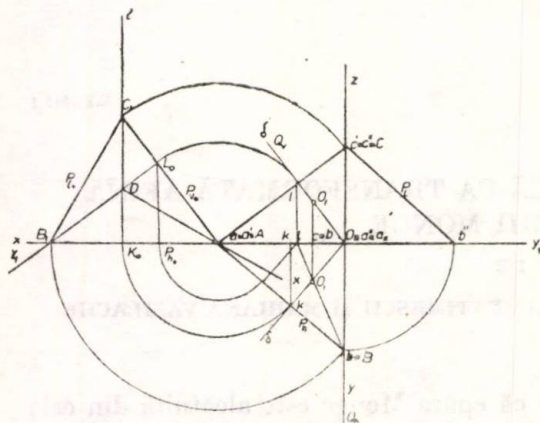


Fig. 1

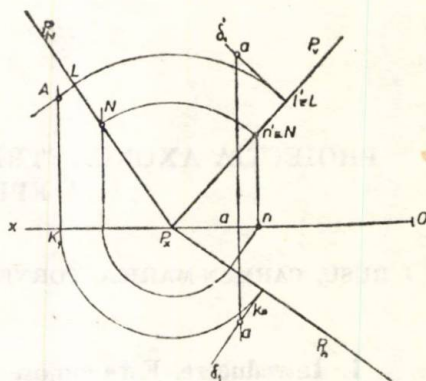


Fig. 2

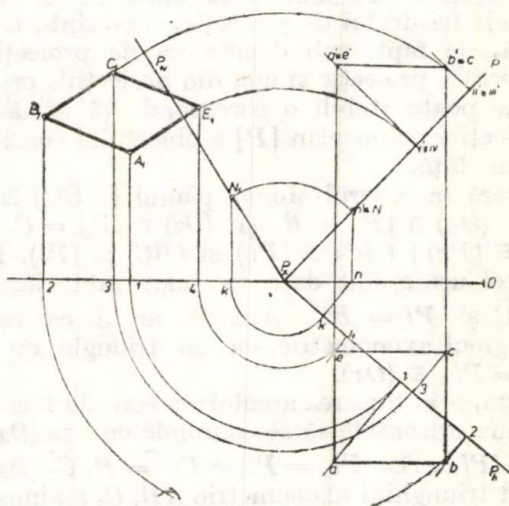


Fig. 3

Din aceste observații rezultă că nu sînt necesare proiecțiile ortogonale pe planul $[P]$ ale punctelor spațiului și că proiecțiile lor axonometrice pot fi găsite ca și originea O proiectată și adusă în poziția O_1 . Modul simplificat este indicat în fig. 2, în care diedrul este reprezentat prin axa (Ox) . Planul $[P]$ axonometric este dat prin urmele sale (Ph) și (Pv) . Se cere găsirea proiecției axonometrice A_1 a unui punct $A(a, a')$ considerat. S-au dus proiecțiile δ_1 și δ_1' prin a și respectiv prin a' pe urmele de același nume ale planului, proiecții care pot fi considerate ca direcții ale axelor axonometrice

$(O_1 z_1)$ și respectiv $(O_1 y_1)$ în epura Monge. Un punct oarecare $N(n, n')$ a urmei (Pv) este necesar pentru găsirea proiecției noi N_1 ce s-a realizat prin procedeul indicat și utilizat în scopul găsirii punctului O_1 , proiecția axonometrică a originii O , ca transformată a epurei Monge. Se observă că $(P_1 N) \equiv (P_1 v)$. Arcul de cerc kk_1 cu centrul în P_1 intersectează axa $(Ox) = P_1 h$ în k_1 , din care ducând direcția $(O_1 z_1)$ rezultă intersecția acestei drepte cu dreapta dusă prin L_1 perpendiculară pe $(P_1 v)$. De fapt dreapta $(L_1 A_1)$ reprezintă direcția altei axe axonometrice și anume $(O_1 y_1)$. Astfel, prin intersecția direcțiilor (dreptelor) axelor axonometrice menționate rezultă transformatul A_1 al punctului A .

În fig. 3 s-a considerat un grup de patru puncte ale spațiului, care de exemplu, corespund vîrfurilor unui pătrat de nivel, cărora li s-au găsit în modul indicat mai sus transformatele axonometrice; paralelogramul $A_1 B_1 C_1 E_1$ este deci transformatul axonometric al pătratului $A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$, $E(e, e')$ din epura Monge. Planului $P(P_h, P_v)$ i s-a găsit urma verticală $(P_1 v)$ ca și în epura din fig. 2.

3. Aplicații. 3.1. Transformata afină axonometrică a unor figuri geometrice plane. a) Se dă planul $P(P_h; P_v)$ și pătratul $ABCE$ ($abce; a' b' c' e'$) situat într-un plan de nivel de cotă dată, (fig. 4). Proiecția ortogonală $A_1 B_1 C_1 E_1$ a acestui poligon pe planul considerat $[P]$ este de fapt proiecția axonometrică, care este transformată afină a pătratului dat.

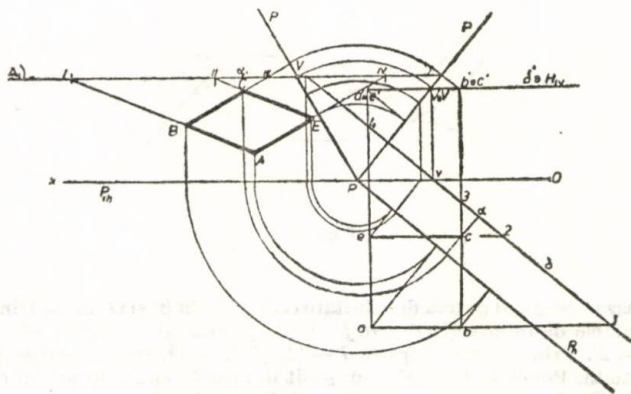


Fig. 4

Se proiectează ortogonal pe planul $[P]$ vîrfurile poligonului (pătratului), ale căror transformate se găsesc în același mod indicat mai înainte. Considerînd că de fapt între pătratul $ABCE$ din planul de nivel și proiecția sa ortogonală pe planul oarecare $[P]$ se stabilește o corespondență afină, s-a construit proiecția $A_1 B_1 C_1 E_1$ pe baza acestei proprietăți proiective. Astfel, în fig. 4 axa de afinitate este $\Delta(\delta, \delta') = [H] \cap [P]$.

Prin urmare, orizontala $\Delta(\delta, \delta')$ este intersecția dintre planul $[P]$ și planul de nivel $[H]$ în care este situat pătratul $ABCE$. Urmă verticală $V(v, v')$ este adusă pe transformată $(P_1 v)$ a urmei verticale în V_1 punct prin care se duce o paralelă la $(P_1 h) \equiv (Ox)$ și care este transformată a axei de afinitate.

Este necesar să se găsească proiecția pe planul $[P]$ a unui singur punct, de exemplu proiecția vîrfului C este transformatul afin C_1 . Apoi, în proiecția Monge se prelungesc laturile pătratului (din proiecția orizontală), pînă se obțin intersecțiile 1, 2, 3 și 4 cu proiecția orizontală δ a axei de afinitate. Se proiectează ortogonal proiecția c pe δ , față de care se măsoară distanțele la punctele de intersecție menționate. Astfel există segmentele de dreaptă egale: $\alpha - I =$

$a - I$; $\alpha - 2 = \alpha_1 - II$; etc. Prin urmare, paralelogramul $A_1B_1C_1E_1$ se poate construi cunoscând vârful C_1 , axa de afinitate (Δ_1), precum și punctele I, II, III, IV .

b) Trecind la proiecția cercului pe un plan $[P]$ s-a considerat aceeași corespondență dintre cercul $\Omega(\omega, \omega')$ și elipsa Ω_1 . În fig. 5 cercul Ω este situat în planul de front $[F]$ așa încît axa de afinitate este frontala $F(f, f')$ a cărei urmă $H(h, h')$ are ca transformată punctul H_1 prin care se duce paralela (F_1) la (P_1v). Prin urmare, transformata (F_1) este axa de afinitate. Centrul Ω_1 al elipsei este proiecția transformată pe planul $[P]$ a centrului Ω al cercului dat. În proiecția verticală Monge se prelungesc diametrii $a'b'$ și $c'e'$ spre a intersecta proiecția f' în punctele $1'$ și $2'$.

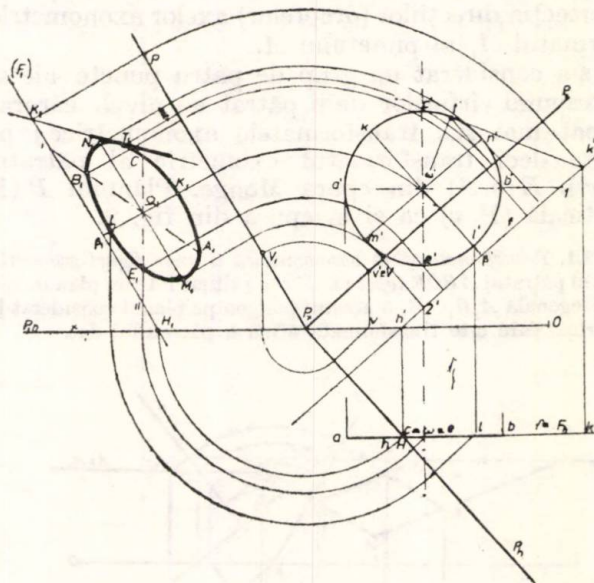


Fig. 5

Se proiectează ortogonal pe axa de afinitate centrul ω' în β' și Ω_1 în β_1 . Din β_1 se măsoară distanțele la punctele de intersecție dintre f' și $a'b'$ precum și $c'e'$ astfel că $\beta_1 - I = \beta' - I'$ și $\beta_1 - II = \beta' - 2'$. Prin urmare dreptele $I - \Omega_1$ și $II - \Omega_1$ sînt direcțiile diametrilor afini în epura transformată. Punctele B_1 și E_1 s-au găsit în această epură în modul cunoscut și cum $\Omega_1B_1 = \Omega_1A_1$ sau $\Omega_1E_1 = \Omega_1C_1$ s-au putut găsi direct diametrii conjugăți în elipsa afină a cercului dat Ω . Aceasta este suficient pentru trasarea elipsei Ω_1 .

Procedind însă după metoda punct cu punct indicată la început s-au găsit pe aceeași epură virfurile corespunzătoare axelor astfel: M_1N_1 este axa mare și K_1L_1 este axa mică.

Construcția tangentei într-un punct la elipsa construită necesită mai întîi construcția tangentei în punctul corespunzător la cercul dat Ω . De aceea pe proiecția verticală ω' a cercului se consideră un punct t' , iar tangenta în acest punct intersectează proiecția verticală f' a axei de afinitate în k' . Punctele K_1 și T_1 ca transformate ale punctelor $K(k')$ și $T(t')$ determină tangenta la elipsă.

3.2. Transformata axonometrică afină a corpurilor geometrice; hexaedrul. Se consideră reperul Monge, planul $P(Ph; Pv)$ și hexaedrul (clubul) $ABCEMNPR(abce mnpr, a'b'c'e'm'n'p'r')$. Fața $ABCE(abce; a'b'c'e')$ este un pătrat situat în planul de nivel $[H_1]$, astfel că $Z_{H_1} = Z_A = Z_B = \dots$ etc.

Transformatul afin al vârfului C este punctul C_1 , care se obține așa cum s-a arătat mai înainte, adică prin rotația în jurul punctului P_x a urmei orizontale (P_1h) $\equiv (Ox)$.

Urma (P_1v) este determinată de punctele P_x și V , punctul V_1 fiind transformatul punctului V ce aparține urmei verticale (Pv) a planului $[P]$.

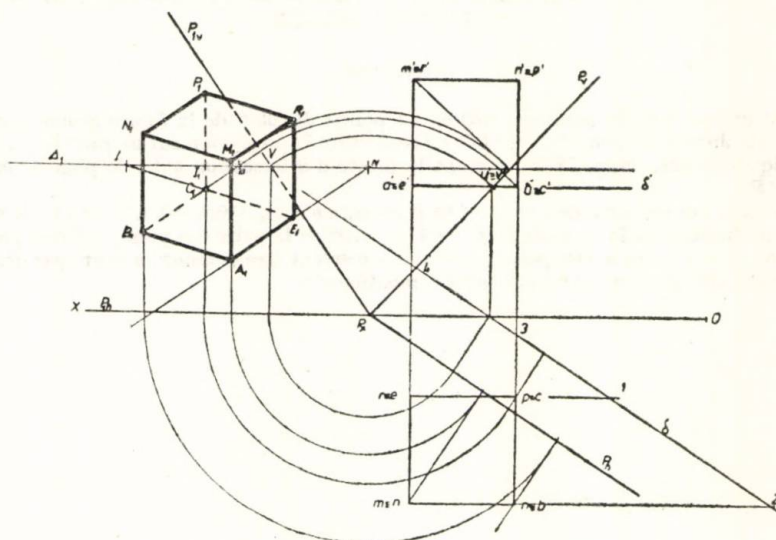


Fig. 6

4. **Concluzii.** 1. Se pun în evidență aspecte noi ale construcției unei imagini tridimensionale (axonometrice), care utilizează corespondența dintre una din proiecțiile ortogonale ale unui obiect dat și proiecția sa ortogonală pe un plan oarecare.

2. În cazul figurilor geometrice plane se utilizează corespondența de omologie afină dintre aceste figuri și proiecțiile lor pe un plan $[P]$ identic cu cel axonometric. Axele de afinitate sînt atunci drepte de intersecție dintre planele figurilor geometrice și planul $[P]$ axonometric.

3. Lucrarea prezintă interes pentru cei ce lucrează în proiectare și cercetare.

Primită la 22 mai 1978

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geometrie descriptivă și
desen

BIBLIOGRAFIE

1. Tănăsescu A., *Geometrie descriptivă. Axonometrie*. EDP., Buc., 1968.
2. Gheorghiu A., *Tehnica desenului perspectiv*. Ed. tehn., Buc., 1963.
3. Rusu I., *Bazele unei geometrii reprezentative de corespondență cu direcția de proiectare ortogonală*. Bul. inst. polit. Iași, XVI (XX), 3—4, s. I (1970).
4. Rusu I., *Geometrie reprezentativă de corespondență în proiecția cilindrică oblică*. Bul. Inst. polit. Iași, XX (XXIV), 1—2, s. I (1974).

LA PROJECTION AXONOMETRIQUE COMME TRANSFORMÉE AFFINE DE L'ÉPURE MONGE

(Résumé)

On utilise la correspondance affine des points du plan de la figure géométrique donnée et les points du plan P (Ph , Pv), au but de construire la projection sur un plan $[P]$ d'une figure géométrique donnée, l'axe d'affinité étant la droite d'intersection entre le plan de la figure et le plan $[P]$.

Dans le cas du carré de niveau $ABCE$ ($abce$, $a'b'c'e'$), l'axe est Δ (δ , δ'); dans le cas du cercle Ω de front, c'est la frontale F (f , f'). On construit la paire des points affines, par exemple $A \rightarrow A_1$ ou $\Omega \rightarrow \Omega_1$; les autres points nécessaires peuvent être obtenus en épure par des constructions basées sur la correspondance affine mentionnée.



Fig. 1

BENDING OF A COMPRESSIBLE CIRCULAR BLOCK INTO A SPHERICAL SHELL

BY

RAM KUMAR SHUKLA and G. LAKSHMINARAYANA

1. Introduction. G. Lakshminarayana [1] has solved the problem of bending of a circular block when the material is incompressible and obtained an exact solution in terms of strain energy function using the theory of large elastic deformations. Since most materials in nature are compressible, it is natural that a study of this material is of greatest practical importance. When the materials are compressible, very few problems have been solved due to the difficulty in obtaining the exact solutions.

In this paper we consider the problem of Bending of a circular Block into a Spherical Shell and obtain an exact solution in terms of strain function W , when the material is *compressible*. The case of incompressibility is deduced as a particular case.

2. Notations and Formula. Following the notations of Green and Zerna [2] we take x_i -axes to define the unstrained body B_0 and y_i -axes to refer the strained body B . We take the curvilinear coordinates θ^i in the strained body. Let the covariant and contravariant metric tensors in the deformed and undeformed body be respectively G_{ij}, G^{ij} and g_{ij}, g^{ij} . When the unstrained body is homogeneous and isotropic, the strain energy function W , measured per unit volume of the unstrained body is a function of strain invariants, so that

$$(2.1) \quad W = W(I_1, I_2, I_3),$$

where

$$(2.2) \quad I_1 = g^{rs} G_{rs}, \quad I_2 = g_{rs} G^{rs} I_3, \quad I_3 = \frac{G}{g}$$

and

$$(2.3) \quad G_{rs} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial \theta^r} \frac{\partial y^\beta}{\partial \theta^s}, \quad G = |G_{ij}|,$$

$$g_{rs} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^r} \frac{\partial x^\beta}{\partial \theta^s}, \quad g = |g_{ij}|.$$

The contravariant stress tensor, measured per unit area of strained body referred to θ^i coordinates is given by

$$(2.4) \quad T^{ij} = g^{ij} \Phi + B^{ij} \Psi + G^{ij} p,$$

where

$$(2.5) \quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2 \sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

$$B^{ij} = \frac{1}{g} e^{jrm} e^{tsn} g_{rs} G_{mn}.$$

The equations of equilibrium in the absence of body forces are given by

$$(2.6) \quad T^{ij} |_{,i} = 0,$$

where the vertical line denotes covariant differentiation with respect to the strained body.

The physical components of the stress σ_{ij} are given by

$$(2.7) \quad \sigma_{ij} = \sqrt{\frac{G_{jj}}{G^{ii}}} T^{ij}.$$

3. Bending of the Block. Suppose that in the undeformed state of the body it is a circular block bounded by the planes $x_3 = a_2$ and $x_3 = a_1$, $a_2 > a_1$, and the cylinder $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. The block is then bent into a part of a spherical shell of a outer radius r_2 , inner radius r_1 and the edge $\theta = \alpha$. Let y_i -axes coincide with the x_i -axes and the curvilinear coordinates θ^i in the deformed state be a system of spherical polar coordinates (r, θ, φ) , so that

$$(3.1) \quad y_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad y_3 = r \cos \theta.$$

Since the deformation is symmetrical about x_3 -axis we see that:

- i) the planes $x_3 = \text{const.}$ in the undeformed state become the spherical surfaces $r = \text{const.}$ in the deformed state;
- ii) the circles $x_1^2 + x_2^2 = \text{const.}$ in the undeformed state become the small circles $\theta = \text{const.}$ in the deformed state;
- iii) $\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} = \varphi$.

These imply [1]

$$(3.2) \quad x_3 = f(r), \quad x_1^2 + x_2^2 = F(\theta) = \lambda \theta,$$

where λ is a constant. Therefore we get

$$(3.3) \quad x_1 = \lambda \theta \cos \varphi, \quad x_2 = \lambda \theta \sin \varphi, \quad x_3 = f(r).$$

The metric tensors for the strained and the unstrained bodies are given by

$$(3.4) \quad G^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{vmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}, \quad G = r^4 \sin^2 \theta,$$

$$(3.5) \quad g^{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{f_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2 \theta^2} \end{vmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{vmatrix} f_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \theta^2 \end{vmatrix}, \quad g = \lambda^4 f_r^2 \theta^2,$$

where $f_r = df/dr$. Substituting (3.4) and (3.5) in (2.2) and taking $\sin \theta \cong \theta$ [1], we have

$$(3.6) \quad I_1 = \frac{1}{f_r^2} + \frac{2r^2}{\lambda^2}, \quad I_2 = \frac{r^4}{\lambda^4 f_r^2} \left(f_r^2 + \frac{2\lambda^2}{r^2} \right), \quad I_3 = \frac{r^4}{\lambda^4 f_r^2}.$$

Substituting (3.4) and (3.5) in (2.5) we have

$$(3.7) \quad B^{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2r^2}{\lambda^2 f_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2 f_r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{\lambda^4 \theta^2} + \frac{1}{\lambda^2 f_r^2 \theta^2} \end{vmatrix}.$$

The nonvanishing physical components of stress (2.5) are given by

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= T^{11} = \frac{\Phi}{f_r^2} + \frac{2r^2}{\lambda^2 f_r^2} \Psi + p, \\ \sigma_{22} &= r^2 T^{22} = \frac{r^2 \Phi}{\lambda^2} + \left(\frac{r^4}{\lambda^4} + \frac{r^2}{\lambda^2 f_r^2} \right) \Psi + p, \\ \sigma_{33} &= r^2 \theta^2 T^{33} = \sigma_{22}. \end{aligned}$$

From (2.6) and (3.8) the equations of equilibrium to be satisfied are given by

$$(3.9) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{2(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{r} = 0,$$

$$(3.10) \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0.$$

From (3.10), it is obvious that p is purely a function of r only. From (3.8) and (3.9) we get

$$(3.11) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} = \frac{2}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) = \left(\frac{2r}{\lambda^2} - \frac{2}{r f_r^2} \right) \Phi + \left(\frac{2r^3}{\lambda^4} - \frac{2r}{\lambda^2 f_r^2} \right) \Psi.$$

Since the strain energy function W is a function of I_1, I_2, I_3 and in turn I_1, I_2, I_3 are functions of r only we have

$$(3.12) \quad \frac{dW}{dr} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{dI_1}{dr} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{dI_2}{dr} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{dI_3}{dr}.$$

From (2.5), (3.6) and (3.11) Eqs. (3.12) reduce to

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \frac{dW}{dr} &= \frac{r^2}{\lambda^2 f_r} \left[\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} - \left(\frac{f_{rr}}{f_r} - \frac{2}{r} \right) \left(\frac{\Phi}{f_r^2} + \frac{2r^2}{\lambda^2 f_r^2} \Psi + p \right) \right] = \\ &= \frac{r^2}{\lambda^2 f_r} \left[\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} - \left(\frac{f_{rr}}{f_r} - \frac{2}{r} \right) \sigma_{11} \right] = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \sigma_{11}}{f_r} \right). \end{aligned}$$

Integration of (3.18) gives

$$(3.14) \quad \sigma_{11} = \frac{\lambda^2 f_r^2}{r^2} (W + W_0) = \frac{W + W_0}{\sqrt{I_3}},$$

where W_0 is an integration constant. From (3.11) and (3.14) we get

$$(3.15) \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{W + W_0}{\sqrt{I_3}} + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{W + W_0}{\sqrt{I_3}} \right).$$

Evaluation of $f(r)$. From (2.5) and (3.8), Eq. (3.14) reduces to

$$(3.16) \quad W + W_0 = \frac{2r^2}{\lambda^2 f_r^2} \left[\frac{\lambda^2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{r^2}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \right],$$

which by integration gives

$$(3.17) \quad x_3 = f(r) = \int \frac{r}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{W + W_0} \left(\frac{\lambda^2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{r^2}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \right)} dr + K,$$

where K is an integration constant. The constants K and W_0 can be determined by substituting the initial conditions $x_3 = a_i$ when $r = r_i$, $i = 1, 2$ in (3.17).

4. Boundary Conditions. If the inner surface of the shell ($r = r_1$) is free from tractions we must have

$$(3.18) \quad \sigma_{11} = 0 \quad \text{when} \quad r = r_1,$$

which on substitution in (3.14) gives

$$(3.19) \quad W_0 = -W(r_1).$$

Putting this value of W_0 in (3.14) we have

$$(3.20) \quad \sigma_{11} = \frac{W(r) - W(r_1)}{\sqrt{I_3}}.$$

On the outer surface of the shell $r = r_2$ we have to apply a radial force R_1 given by

$$(3.21) \quad R_1 = \frac{W(r_2) - W(r_1)}{\sqrt{I_3(r_2)}}.$$

The resultant force F and the couple M acting on the edge $\theta = \alpha$ per unit area between φ and $\varphi + d\varphi$ are given by

$$(3.22) \quad F = \sin \alpha \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{22} dr, \quad M = \sin \alpha \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sigma_{22} dr,$$

which give

$$(3.23) \quad 2F = \frac{r_2^2 \sin \alpha}{\sqrt{I_3}(r_2)} [W(r_2) - W(r_1)],$$

$$(3.24) \quad 2M = \sin \alpha \left[r_2^3 (W(r_2) - W(r_1)) - \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2 (W(r) - W(r_1))}{\sqrt{I_3}} dr \right].$$

Thus to bend an isotropic compressible circular block into part of a spherical shell we require a resultant force F and a couple of moment M on the edge and a radial force R_1 on the outer surface of the spherical shell.

5. Incompressible Case. It is interesting to observe that the case of incompressibility [1] can be obtained as a particular case by putting $I_3 = 1$ in the above equations. In fact $I_3 = 1$ gives

$$(3.25) \quad f(r) = \frac{r^3}{3\lambda^2} + K,$$

and the Eqs. (3.14), (3.15), (3.21), (3.23) and (3.24) give

$$(3.26) \quad \sigma_{11} = W(r) - W(r_1),$$

$$(3.27) \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = W + W_0 + \frac{r}{2} \frac{dW}{dr},$$

$$(3.28) \quad R_1 = W(r_2) - W(r_1),$$

$$(3.29) \quad 2F = r_2^2 \sin \alpha [W(r_2) - W(r_1)],$$

$$(3.30) \quad 2M = \sin \alpha \left[r_2^3 W(r_2) - \frac{2r_2^3 + r_1^3}{3} W(r_1) - \int_{r_1}^{r_2} r^2 W dr \right],$$

which tally with the earlier results [1].

Received October 2, 1976

Military College of Electronics and
Mechanical Engineering, Secunderabad
and
Nagarjunasagar Engineering College,
Hyderabad, India

REFERENCES

1. Lakshminarayana G., Bul. Inst. polit. Iași, VIII (XII), 1-2, 51-56 (1962).
2. Green A. E., Zerna W., *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, Oxford, 1954.

ÎNCOVOIEREA BLOCURILOR CIRCULARE COMPRESIBILE ÎN ÎNVELIȘURI SFERICE

(Rezumat)

Se studiază problema încovoierii blocurilor circulare în învelișuri sferice, obținând o soluție exactă exprimată prin intermediul energiei de deformare W . Drept caz particular se regăsesc rezultatele din cazul materialelor incompresibile [1].

AN UNIQUENESS THEOREM IN THE LINEAR THEORY OF HEAT CONDUCTING WITH MEMORY

BY

C. FETECĂU

The linearized heat equation, as it was deduced in [1] is

$$(1) \quad \alpha(0)\theta(x, t) + \int_0^t \alpha'(s)\theta(x, t-s)ds = k(0)\nabla^2\theta(x, t) + \int_0^t k'(s)\nabla^2\theta(x, t-s)ds + r(x, t),$$

where $k(\cdot)$ and $\alpha(\cdot)$ are called relaxation functions of the heat conducting and energy-temperature, respectively, and θ is the temperature of the body. In [1], it was proved the uniqueness of the solution of the initial-boundary value mixed problem associated with (1), when $\alpha(0) > 0$, $\alpha'(0) \geq 0$ and $\alpha''(0) > 0$.

The aim of this note is to prove the uniqueness of the same problem, when θ is given on the boundary, but without restrictions upon $\alpha(0)$, $\alpha'(0)$ and $\alpha''(0)$.

Theorem. *If the equation (1) with the conditions*

$$(2) \quad \theta = 0 \text{ on } B \times (-\infty, 0] \text{ and } S \times (0, \infty), \quad r = 0 \text{ on } B \times (-\infty, \infty),$$

has a continuous solution on $B \times (-\infty, \infty)$, then it is unique.

Proof. Let $\theta(x, t)$ be a continuous solution of our problem. In view of a well-known theorem of Steklov [2], Ch. 4, §1, we can write it as a Fourier series absolutely and uniformly convergent in terms of the eigenfunctions of the problem

$$(3) \quad \nabla^2\theta + \lambda\theta = 0 \text{ on } B; \quad \theta = 0 \text{ on } S,$$

i.e.,

$$(4) \quad \theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\theta_n(x); \quad \theta_n = 0 \text{ on } S, \quad a_n(0) = 0,$$

where the system of independent eigenfunctions $\{\theta_n, n = 1, 2, \dots\}$ will be taken to be orthonormated (it can realise this) i.e.,

$$(5) \quad \int_B \theta_n(x) \theta_m(x) dV = \delta_{mn} \quad (\delta_{mn} = 0 \text{ or } 1).$$

Now, introducing (4) in (1), then multiplying by $\theta_m(x)$ and integrating on B we attain to

$$(6) \quad \alpha(0)a_n(t) + \int_0^\infty \alpha'(s) \dot{a}_n(t-s) ds = -\lambda_n k(0) a_n(t) - \lambda_n \int_0^\infty k'(s) a_n(t-s) ds.$$

Instituting a change of variables ($\tau = t - s$) in (6), integrating by parts the first integral and using (2)₁ we get

$$(7) \quad \beta_n(0)a_n(t) + \alpha(0)\dot{a}_n(t) + \int_0^t \beta'_n(t-\tau)a_n(\tau) d\tau = 0,$$

where $\beta_n(t) = \alpha(t) + \lambda_n k(t)$. Let us now integrate (7) from 0 to t and let us change the order of integration in the last integral, considering it as a double integral over the domain

$$D = \{(\tau, s); 0 \leq \tau \leq s, 0 \leq s \leq t\} = \{(s, \tau); \tau \leq s \leq t, 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Using again (2)₁, we shall obtain

$$(8) \quad a_n(t) = \int_0^t \gamma_n(t-s)a_n(s) ds, \quad \gamma_n(t) = -\frac{1}{\alpha(0)} \beta_n(t).$$

As, the equation (8) has a unique solution on $[0, \infty)$ (see [3], p. 75, the problem 4) when $\gamma_n(\cdot)$ is measurable on every finite interval $[0, \tau]$, it results that our problem has a unique solution, $\alpha'(\cdot)$ and $k(\cdot)$ being measurable on each finite subinterval of $[0, \infty)$.

Received August 30, 1976

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Nunziato J., *On Heat Conduction in Materials with Memory*. Quart. Appl. Math., 29, 187-204 (1971).
2. Арсенин В., *Математическая физика*. Изд. „Наука“, М., 1976.
3. Miller R. K., *Nonlinear Volterra Integral Equations*. W.A. Benjamin, Inc., California, 1971.

O TEOREMĂ DE UNICITATE ÎN TEORIA LINIARĂ A CONDUȚIEI DE CĂLDURĂ CU MEMORIE

(Rezumat)

Se demonstrează unicitatea soluției unei probleme la limită asociate lui (1), fără a impune restricții funcțiilor materiale.

QUASI-NEWTONIAN INTERPRETATION OF SPECIAL RELATIVISTIC DYNAMICS

BY

ZORAN VRCELJ

1. Quasi-Newtonian interpretation of special relativistic dynamics is based on Newtonian-type equations of motion, employs the methods of classical (especially celestial) mechanics, and is in the spirit of the post-Newtonian approximation to general relativity [1]. In the case of mathematically much simpler special relativity, quasi-Newtonian treatment can be pursued without restrictions to low (compared to that of light) velocities and weak fields characterizing the post-Newtonian approximation. Quasi-Newtonian interpretation provides an additional insight into the nature of special relativistic effects and offers a convenient way of investigating some pre-relativity electromagnetic theories [2]. Quasi-Newtonian interpretation is substantially different from any four-dimensional formulation of Newtonian mechanics [3]; the former is a Newtonian-type presentation of relativistic (high velocities) dynamics, while the latter is a representation of the original (low velocities) Newtonian mechanics in a covariant form.

2. The special relativistic equations of motion of a particle acted upon by a Newtonian force $\mathbf{F}$ can be rewritten in the equivalent classical, Galilean invariant, form

$$(1) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

where m is the proper (rest) mass of the particle, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ its instantaneous (three) velocity, and $\mathbf{F}$ is a new velocity-dependent force given by

$$(2) \quad \mathbf{F} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}) - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \hat{\mathbf{v}} \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{F}), \quad (v < c),$$

$\hat{\mathbf{v}}$ being the velocity unit vector. The so-called longitudinal and transverse masses can be read off immediately, although there is no need to introduce them at all. This force $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ as $v/c \rightarrow 0$ (nonrelativistic limit), and $\mathbf{F} \rightarrow 0$ as $v/c \rightarrow 1$ (ultrarelativistic limit). The principle of action-reaction should be weakened by equating new forces of action and reaction as free rather

than as sliding vectors [4]. As a consequence, the classical angular momentum is not conserved, and the additional angular momentum can be attributed to spin.

In the case of central Newtonian force, i.e. $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, the velocity-dependent force is generally noncentral and given by

$$(3) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{v_r \mathbf{v}}{c^2}\right) F(r), \quad (v < c)$$

where $v_r = dr/dt$ is the radial velocity. In the particular case when $F(r)$ is inversely proportional to the square of the distance, the equations of motion can exactly be solved for trajectories by finding first integrals [5]. Giving $F(r)$ by Newton's law of gravitation, the periastron motion appears to be six times smaller than according to general relativity. Giving $F(r)$ by Coulomb's law for point charges, the well-known results characterising the motion of a relativistic particle in the Coulomb field can be deduced [6].

3. The extension of special relativity to the velocities greater than that of light has been pursued by many authors, with some modification of the Lorentz transformation as a common feature of all treatments. Nearly all aspects of the subject have been searched; from possible existence of superluminal sources and heuristic derivations [7], via two-dimensional theory [8], to a comprehensive treatment including astrophysical implications [9].

Nevertheless there is a way of allowing the velocities greater than that of light by extending analytically the expression for the force $\mathbf{F}$. Requiring the continuity and smoothness of $\mathbf{F}$ as a function of $\mathbf{v}$ for any $v > 0$ (in particular at $v = c$), an adequate expression appears to be

$$(4) \quad \mathbf{F} = -\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{3/2} \hat{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{1/2} \hat{\mathbf{v}} \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{F}), \quad (v > c).$$

Hence the force $\mathbf{F}$, vanishing at $v = c$, changes its sign. This means that a force, attractive at $v < c$ becomes repulsive at $v > c$, and *vice versa*. In other words, attraction and repulsion as physical phenomena so firmly established and unchangeable in static cases and at low velocities are likely to be relative when viewed over an arbitrary velocity range. Consequently, the dynamics of superluminal particles should be antithetic to the usual (subluminal) one. Applying this reason to the gravitational force (although the special relativistic theory of gravitation is not a satisfactory one), it follows that gravitational interaction is always repulsive at $v > c$. However, the relative velocity of two particles in mutual interaction, even when starting with an infinite separation, cannot exceed the velocity c because the force of interaction tends to zero as $v \rightarrow c$. If the relative velocity exceeded c , the force of interaction would change from attractive to repulsive (if it was attractive initially) preventing any further increase in the velocity and reducing it to the value of c . Thus the velocity c appears to be somehow privileged and the switching of signs, artificial at the first sight, seems to be philosophically tantamount to the Le Chatelier principle

in thermodynamics and the Lenz law in electromagnetism. The vanishing of force $\mathbf{F}$ at $v = c$ means that a particle moving with velocity c behaves like a free particle in accordance with Newton's law of inertia.

It should be noted that some authors, although expressing similar ideas, have predicted a different behaviour of „tachyons“ [9]; roughly speaking, signs are switched twice so that a superluminal particle in a gravitational field bends in the same direction as a subluminal one.

In the case of *central* Newtonian force, the extension of the velocity-dependent force is given by

$$(5) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = - \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)^{1/2} \left[\hat{\mathbf{r}} - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{v}_r \mathbf{v}}{c^2} \right] F(r), \quad (v > c)$$

as a particular case of Eq. (4). The velocity-dependent force given by Eqs. (3) and (5) is central (collinear to $\mathbf{F}$) only at instants when the velocity $\mathbf{v}$ is collinear or perpendicular to the radius vector $\mathbf{r}$, and then it reduces to

$$\pm \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \right|^{3/2} F(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{or} \quad \pm \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \right|^{1/2} F(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad (v \leq c)$$

respectively.

4. The change of repulsive forces into attractive and *vice versa* at the velocity c might be of interest in constructing quasi-classical models of „elementary“ particles [10]. Let us tentatively assume that the structure of an electron of proper mass m_0 and charge e_0 can be represented by a set of n (positive integer) equal „pieces“ of mass m_0/n and charge e_0/n all moving round the center of mass with velocities c in magnitude, and that the motion of anyone of them is governed by an Eq. of type (1) with $m = m_0/n$ and $e = e_0/n$. Relative velocities corresponding to pairs of „pieces“ may range from 0 to $2c$ since in the center-of-mass frame classical rather than special relativistic composition holds [11]. It is possible to imagine such a configuration of „pieces“ that is dynamically stable due to component forces of attraction corresponding to relative velocities in the range from c to $2c$. Hence there is a prospect of developing models of stable „elementary“ particles without postulating Poincaré stresses.

5. Although cosmological problems are not discussed in this paper, it should be noted that some *ad hoc* generalizations of Newton's law of gravitation [12], [13] introduce a velocity-dependence which is different from that given here by the force $\mathbf{F}$ (a singularity instead of zero at $v = c$, velocities measured relative to a „substratum“, etc.) and therefore their consistency with special as well as Galilean relativity seems to be questionable.

Acknowledgement. The author would like to thank Prof. A. J a n i s for helpful discussions.

Received June 1, 1976

University of Pittsburgh, Penna,
U.S.A. and University of Belgrade,
Yugoslavia

REFERENCES

1. Weinberg S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, Chap. 9, 1972.
2. Whittaker E., *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Nelson, London, Vol. I, Chap. 7, 1951.
3. Havas P., *Four-Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and their Relation to the Special and the General Theory of Relativity*. Rev. Mod. Phys., 36, 988—965 (1964).
4. Vrcelj Z., *Interpretacija relativističke dinamike uvođenjem karakteristične zavisnosti sile od brzine (I)*. Mat. Vesnik, 10 (25), 339—350 (1973).
5. Vrcelj Z., *Interpretacija relativističke dinamike uvođenjem karakteristične zavisnosti sile od brzine (II)*. Mat. Vesnik, 11 (26), 245—257 (1974).
6. Landau L. D., Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields*. Pergamon, Oxford, 3rd Ed., Chap. 5, 1971.
7. Gregory C., *Doppler Effects and Hypervelocities of 3C 279 Sources*. Nature Phys. Sci., 239, 56—57 (1972).
8. Parker L., *Faster-Than-Light Inertial Frames and Tachyons*. Phys. Rev., 188, 2287—2292 (1969).
9. Recami E., Mignani R., *Classical Theory of Tachyons*. Riv. Nuovo Cim., 4, 209—290 (1974).
10. MacGregor M. H., *Models for Particles*. Lett. Nuovo Cim., 4, 211—214 (1970).
11. Bjorken J. D., Drell S. D., *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, Chap. 7.9, p. 137, 1964.
12. Bastin J. A., *An Extension of the Newtonian Law of Gravitation*. Proc. Camb. Phil. Soc., 56, 401—409 (1960).
13. Prokhovnik S. J., *The Logic of Special Relativity*. Cambridge Univ. Press, Chap. 5.6, 1967.

INTERPRETAREA CUASI-NEWTONIANĂ A DINAMICII RELATIVITĂȚII
RESTRÎNSE

(Rezumat)

Se rescrie ecuația de mișcare relativistă a unei particule acționate de forța F , într-o formă clasică echivalentă, invariantă Galilei (1), în care m este masa de repaos, v — viteza iar F o nouă forță dependentă de viteză (2), $\hat{v}$ fiind versorul vitezei.

Tratarea cuasi-newtoniană a relativității restrinse permite studiul mișcării fără restricțiile privind vitezele mici în raport cu viteza luminii și caracterul slab al câmpurilor de forțe.

THE CALCULATION OF s_{jp} -COEFFICIENTS IN $SL(n, C)$ EXTENSION FORMULAS

BY

GH. ZET

1. Introduction. In some previous works [1] — [3] it has been considered the problem of the extension of suitably chosen unitary representations of $SU(n) \times T_{n-1}$ to the principal series (degenerate and nondegenerate) of unitary irreducible representations of $SL(n, C)$. The formulas giving this extension were named extension formulas. If the generators of $SL(n, C)$ are noted by J_β^α and K_β^α , and those of $SU(n) \times T_{n-1}$ by J_β^α and P_β^α ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$), then the extension formulas have the form [2], [3]:

$$(1.1) \quad J_\beta^\alpha = J_\beta^\alpha,$$

$$(1.2) \quad K_\beta^\alpha = \rho_2 P_\beta^\alpha + i \sum_{j=2}^n a_j (Q_j J - J Q_j)_\beta^\alpha + i \sum_{\substack{j, k=2 \\ (j > k)}}^n a_{jk} (Q_j J Q_k - Q_k J Q_j)_\beta^\alpha,$$

where the $(Q_j)_\beta^\alpha$'s are given by the following expressions:

$$(1.3) \quad (Q_j)_\beta^\alpha = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{j-2}=1}^n P_{\gamma_1}^\alpha P_{\gamma_2}^{\gamma_1} \dots P_{\gamma_{j-2}}^{\gamma_{j-3}} - \frac{1}{n} \delta_\beta^\alpha \sum_{\lambda, \mu_1, \dots, \mu_{j-2}=1}^n P_{\mu_1}^\lambda P_{\mu_2}^{\mu_1} \dots P_{\mu_{j-2}}^{\mu_{j-3}},$$

$$(j = 2, 3, \dots, n).$$

The coefficients a_j and a_{jk} ($j > k$) in (1.2) are determined, in the case of principal nondegenerate series of $SL(n, C)$, by the following two „non-coupled“ systems of linear equations [3]:

$$(1.4) \quad \sum_{j=2}^n s_{jp} a_j = \frac{2(p-1)}{n}, \quad (p = 2, 3, \dots, n),$$

$$(1.5) \quad \sum_{\substack{j, k=2 \\ (j > k)}}^n (s_{jp} s_{kq} - s_{jq} s_{kp}) a_{jk} = 1, \quad (p, q = 2, 3, \dots, n; \quad p > q).$$

The quantities s_{jp} in these equations can be all expressed as functions of $s_{2p} = \rho_p / \rho_2$ ($p = 2, 3, \dots, n$), where $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ are real parameters that

together with integer numbers $m_2, m_3, \dots, m_n$ characterize the principal nondegenerate series of $SL(n, C)$ [4].

In this Note the general expression for s_{jp} are given; in this way, the extension formulas (1.1)–(1.2) are complete determined.

2. Calculation of s_{jp} -coefficients. The quantities $(Q_j)_\beta^\alpha$, defined in equation (1.3), can be written in the alternative form [2]:

$$(2.1) \quad (Q_j)_\beta^\alpha = \sum_{p=1}^n s_{jp} (A_p)_\beta^\alpha, \quad (j=2,3,\dots,n),$$

where $(A_p)_\beta^\alpha$ ($p=2,3,\dots,n$ and $\alpha, \beta=1,2,\dots,n$) are expressions characterized by the properties

$$(2.2) \quad \sum_{\alpha=1}^n (A_p)_\alpha^\alpha = 0, \quad (p=2,3,\dots,n),$$

$$(2.3) \quad \sum_{\beta=1}^n (A_p)_\alpha^\beta (A_q)_\beta^\gamma = \sum_{\beta=1}^n (A_p)_\beta^\gamma (A_q)_\alpha^\beta = \frac{n\delta_{pq} - 2}{2n} [(A_p)_\alpha^\gamma + (A_q)_\alpha^\gamma] + \frac{n\delta_{pq} - 1}{n} \delta_\alpha^\gamma.$$

To obtain explicit expression for the coefficients s_{jp} in (2.1), appearing in the same time and in the systems of equations (1.4)–(1.5) let us first observe that $(Q_2)_\beta^\alpha = P_\beta^\alpha$ (by definition). On the other hand, as it has shown in [2], the generators P_β^α have the form

$$(2.4) \quad P_\beta^\alpha = \sum_{p=2}^n s_{2p} (A_p)_\beta^\alpha, \quad (\alpha, \beta=1,2,\dots,n),$$

where $s_{2p} = \rho_p/\rho_2$. In this case the coefficients s_{2p} are complete determined.

If $j=3$, we obtain the following expression from Eq. (1.3):

$$(2.5) \quad (Q_3)_\beta^\alpha = \sum_{\gamma=1}^n P_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma - \frac{1}{n} \delta_\beta^\alpha \sum_{\lambda, \mu=1}^n P_\mu^\lambda P_\lambda^\mu.$$

Introducing Eq. (2.4) in the Eq. (2.5) and using (2.2)–(2.3) we obtain

$$(2.6) \quad (Q_3)_\beta^\alpha = \sum_{p=2}^n \left[[(s_{2p})^2 - \frac{2}{n} s_{2p} \sum_{q=2}^n s_{2q}] (A_p)_\beta^\alpha \right].$$

Now, if we compare Eqs. (2.1) and (2.6), we obtain

$$(2.7) \quad s_{3p} = (s_{2p})^2 - \frac{2}{n} s_{2p} \sum_{q=2}^n s_{2q}, \quad (p=2,3,\dots,n).$$

Similarly, we obtain the following expressions for the coefficients s_{4p} and s_{5p} :

$$(2.8) \quad s_{4p} = (s_{2p})^3 - \frac{3}{n} (s_{2p})^2 \sum_{q=2}^n s_{2q} + \frac{3}{n^2} \sum_{q,r=2}^n s_{2q} s_{2r},$$

$$(2.9) \quad s_{5p} = (s_{2p})^4 - \frac{4}{n} (s_{2p})^3 \sum_{q=2}^n s_{2q} + \frac{6}{n^2} (s_{2p})^2 \sum_{q,r=2}^n s_{2q} s_{2r} - \frac{4}{n^3} s_{2p} \sum_{q,r,t=2}^n s_{2q} s_{2r} s_{2t}.$$

Inspection of the expressions of s_{2p} , s_{3p} , s_{ip} suggests the following general expression of the coefficients s_{jp} :

$$(2.10) s_{jp} = \sum_{i=2}^j (-1)^{i-2} \frac{(j-1)(j-2) \dots (j-i+1)}{(i-2)! n^{i-2}} (s_{2p})^{j-i+1} \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{i-2}=2}^n s_{2a_1} s_{2a_2} \dots s_{2a_{i-2}}.$$

This expression corresponds to the extension of $SU(n) \times T_{n^2-1}$ -representations to those in principal nondegenerate series of $SL(n, C)$. In the case of the principal degenerate series of $SL(n, C)$ the coefficients s_{jp} are depending on the considered series. Their expressions will be done elsewhere.

Received May 29, 1978

Politechnic Institute, Jassy,
Department of Physics

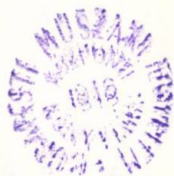
REFERENCES

1. Mukunda N., J. Math. Phys., 10, 897 (1969).
2. Zet Gh., Gottlieb I., Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3-4, s. I, 71 (1977).
3. Zet Gh., C. R. Acad. Sc. Paris, 286, Série A, 5 (1978).
4. Naimark M., In *High Energy Physics and Particles Theory* (in Russian). Kiev, p. 187, 1967.

CALCULUL COEFICIENȚILOR s_{jp} DIN FORMULELE DE EXTENSIUNE PENTRU $SL(n, C)$

(Rezumat)

Se stabilește o expresie generală pentru coeficienții s_{jp} care apar în formulele de extensiune ale reprezentărilor grupului $SU(n) \times T_{n^2-1}$ la reprezentările din seria principală nedege-nerată a grupului $SL(n, C)$.



GENERAL RELATIVISTIC PLASMA SPHERE WITH
CENTRAL GRAVITATING MASS

BY

C. D. CIUBOTARIU and G. C. FLOREA

1. Introduction. The motion of a system composed of a charged fluid coupled to a frozen-in magnetic field in a gravitational field with spherical symmetry is always encountered in the astrophysical Universe. This is the case, for example, of the upper layers of the stars. One may assume, because of the small densities of the cosmic plasma, that the perturbations of the magnetohydrodynamic field (MHD field $\equiv$ plasma plus magnetic field) in the geometry determined by the gravitation of the central body can be neglected.

In this paper we introduce the MHD equations relative to the tetrad field associated to the Schwarzschild line element, and investigate their properties in the case when the four-velocity of the plasma coincides with time like vector of the tetrad [1], [2]. We show that the equations of motion of the plasma are different from those of an uniformly accelerated plasma and thus it is proved that the metric obtained by Möller [3] does not correspond, according to the equivalence principle, to a static plasma distribution in gravitational field.

Finally, we consider the anisotropic gravitational collapse of the plasma and obtain the pressure distribution.

2. The Reference Frame and the Objects of Anholonomy. The notation is as in [1] and [2]: $(\alpha), (\beta), (\gamma), \dots = (0), (1), (2), (3)$ label the vectors and $\mu, \nu, \dots$ are the tensor indices. The physical tetrad associated to the central (Schwarzschild) field of a mass M is [2]

$$\begin{aligned} \lambda_{(0)}^\mu &= \left[\left(1 - \frac{A}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0 \right], \\ \lambda_{(1)}^\mu &= \left[0, \left(1 - \frac{A}{r} \right)^{\frac{1}{2}}, 0, 0 \right], \\ \lambda_{(2)}^\mu &= \left(0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right), \\ \lambda_{(3)}^\mu &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

where $A = 2kM/c^2$, and k is the gravitational constant.

The only nonvanishing objects of anholonomy corresponding to this tetrad are:

$$(2.2) \quad \Omega_{(0)(1)}^{(0)} = -\Omega_{(1)(0)}^{(0)} = \Omega_{(0)(1)(0)} = -\Omega_{(0)(0)(1)} = \\ = \Omega_{(0)(1)}^{(1)} = \Omega_{(0)(1)}^{(0)} = -\frac{A}{4r^2} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$(2.3) \quad \Omega_{(1)(2)}^{(2)} = -\Omega_{(2)(1)}^{(2)} = \Omega_{(2)(1)(2)} = -\Omega_{(2)(2)(1)} = \\ = \Omega_{(2)(1)}^{(1)} = -\Omega_{(2)(1)}^{(2)} = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(2.4) \quad \Omega_{(1)(3)}^{(3)} = -\Omega_{(3)(1)}^{(3)} = \Omega_{(3)(1)(3)} = -\Omega_{(3)(3)(1)} = \\ = \Omega_{(3)(1)}^{(1)} = -\Omega_{(3)(1)}^{(3)} = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(2.5) \quad \Omega_{(2)(3)}^{(3)} = -\Omega_{(3)(2)}^{(3)} = \Omega_{(3)(2)(3)} = -\Omega_{(3)(3)(2)} = \\ = \Omega_{(3)(2)}^{(2)} = -\Omega_{(3)(2)}^{(3)} = \frac{1}{2r} \operatorname{ctg} \theta.$$

3. The General Relativistic Magnetohydrodynamics in Schwarzschild Space. In the present work the approximate interaction between the MHD field and the gravitation field will be described by the tetrad method developed in [1]. In term of the physical components of the tensor the differential equations of relativistic MHD can be written as

$$(3.1) \quad \lambda_{(\beta)}^{\mu} \dot{G}^{(\alpha)(\beta)}_{;\mu} - 2\Omega_{(\beta)(\gamma)}^{(\beta)} \dot{G}^{(\alpha)(\gamma)} + \Omega_{(\beta)(\gamma)}^{(\alpha)} \dot{G}^{(\beta)(\gamma)} = 0,$$

$$(3.2) \quad \lambda_{(\beta)}^{\mu} T^{(\alpha)(\beta)}_{;\mu} - 2\Omega_{(\beta)(\gamma)}^{(\beta)} T^{(\alpha)(\gamma)} - 2\Omega_{(\beta)(\gamma)}^{(\alpha)} T^{(\beta)(\gamma)} = 0,$$

$$(3.3) \quad \lambda_{(\beta)}^{\mu} (\rho u^{(\beta)})_{;\mu} - 2\Omega_{(\beta)(\gamma)}^{(\beta)} \rho u^{(\gamma)} = 0,$$

where

$$(3.4) \quad \dot{G}^{(\alpha)(\beta)} = u^{(\alpha)} h^{(\beta)} - u^{(\beta)} h^{(\alpha)},$$

is the electromagnetic field tensor, and

$$(3.5) \quad T^{(\alpha)(\beta)} = (c^2 \rho + \rho \varepsilon + p + \mu |h|^2) u^{(\alpha)} u^{(\beta)} + \\ + \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2\right) \eta^{(\alpha)(\beta)} - \mu h^{(\alpha)} h^{(\beta)}$$

is the energy-momentum tensor of the MHD field. Using Schwarzschild tetrad (2.1) and the objects of anholonomy (2.2)–(2.5), these equations become

$$(3.6) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{G}^{(0)(1)}_{;1} + \frac{1}{r} \dot{G}^{(0)(2)}_{;2} + \frac{1}{r \sin \theta} \dot{G}^{(0)(3)}_{;3} + \\ + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{G}^{(0)(1)} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \dot{G}^{(0)(2)} = 0,$$

$$(3.7) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \dot{G}^{(1)(0)}_{,0} + \frac{1}{r} \dot{G}^{(1)(2)}_{,2} + \frac{1}{r \sin \theta} \dot{G}^{(1)(3)}_{,3} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \dot{G}^{(1)(2)} = 0,$$

$$(3.8) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \dot{G}^{(2)(0)}_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{G}^{(2)(1)}_{,1} + \frac{1}{r \sin \theta} \dot{G}^{(2)(3)}_{,3} + \\ + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] \dot{G}^{(2)(1)} = 0,$$

$$(3.9) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \dot{G}^{(3)(0)}_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{G}^{(3)(1)}_{,1} + \frac{1}{r} \dot{G}^{(3)(2)}_{,2} + \\ + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] \dot{G}^{(3)(1)} = 0,$$

$$(3.10) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} T^{(0)(0)}_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} T^{(0)(1)}_{,1} + \frac{1}{r} T^{(0)(2)}_{,2} + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} T^{(0)(3)}_{,3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[2 + \frac{A}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] T^{(0)(1)} + \\ + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta T^{(0)(2)} = 0,$$

$$(3.11) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} T^{(1)(0)}_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} T^{(1)(1)}_{,1} + \frac{1}{r} T^{(1)(2)}_{,2} + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} T^{(1)(3)}_{,3} + \frac{A}{2r^2} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (T^{(0)(0)} + T^{(1)(1)}) + \\ + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} T^{(1)(1)} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta T^{(1)(2)} - \\ - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (T^{(2)(2)} + T^{(3)(3)}) = 0,$$

$$(3.12) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} T^{(2)(0)}_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} T^{(2)(1)}_{,1} + \frac{1}{r} T^{(2)(2)}_{,2} + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} T^{(2)(3)}_{,3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[3 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] T^{(2)(1)} + \\ + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta (T^{(2)(2)} - T^{(3)(3)}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} T^{(3)(0)}_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} T^{(3)(1)}_{,1} + \frac{1}{r} T^{(3)(2)}_{,2} + \\
 (3.18) \quad & + \frac{1}{r \sin \theta} T^{(3)(3)}_{,3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[3 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] T^{(3)(1)}_{,1} + \\
 & + \frac{2}{r} \operatorname{ctg} \theta T^{(3)(2)}_{,2} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} (\rho u^{(0)})_{,0} + \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (\rho u^{(1)})_{,1} + \frac{1}{r} (\rho u^{(2)})_{,2} + \\
 (3.14) \quad & + \frac{1}{r \sin \theta} (\rho u^{(3)})_{,3} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[2 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] \rho u^{(1)}_{,1} + \\
 & + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \rho u^{(2)}_{,2} = 0.
 \end{aligned}$$

4. The Comoving Plasma Distribution. In the following part, we consider a fluid sphere composed of a plasma coupled to a frozen-in magnetic field. The four-velocity of the plasma coincides with the time like four vector of the tetrad (2.1) and hence

$$(4.1) \quad u^{(\alpha)} = (1, 0, 0, 0).$$

Substituting Eq. (4.1) into Eqs. (3.5)–(3.14) we obtain

$$(4.2) \quad \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} h^{(1)}_{,1} + \frac{1}{r} h^{(2)}_{,2} + \frac{1}{r \sin \theta} h^{(3)}_{,3} = 0,$$

$$(4.3) \quad h^{(1)}_{,0} = 0, \quad h^{(2)}_{,0} = 0, \quad h^{(3)}_{,0} = 0,$$

$$(4.4) \quad \left(c^2 \rho + \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \mu |h|^2\right)_{,0} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2 - \mu h^{(1)} h^{(1)}\right)_{,1} - \frac{\mu}{r} (h^{(1)} h^{(2)})_{,2} - \\
 (4.5) \quad & - \frac{\mu}{r \sin \theta} (h^{(1)} h^{(3)})_{,3} + \frac{A}{2r^2} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} (c^2 \rho + \rho \varepsilon + p + \mu |h|^2 - \\
 & - \mu h^{(1)} h^{(1)}) - \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (2h^{(1)} h^{(1)} + h^{(2)} h^{(2)} + h^{(3)} h^{(3)}) - \\
 & - \frac{\mu}{r} \operatorname{ctg} \theta h^{(1)} h^{(2)} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \mu (h^{(1)} h^{(2)})_{,1} - \frac{1}{r} \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2 - \mu h^{(2)} h^{(2)}\right)_{,2} + \\
 (4.6) \quad & + \frac{\mu}{r \sin \theta} (h^{(2)} h^{(3)})_{,3} + \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[3 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] h^{(1)} h^{(2)} - \\
 & - \frac{\mu}{r} \operatorname{ctg} \theta (h^{(3)} h^{(3)} - h^{(2)} h^{(2)}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \mu (h^{(1)} h^{(3)})_{,1} + \frac{\mu}{r} (h^{(3)} h^{(2)})_{,2} - \frac{1}{r \sin \theta} \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2 - \right. \\
 (4.7) \quad & \left. - \mu h^{(3)} h^{(3)}\right)_{,3} + \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[3 + \frac{A}{2r} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1}\right] h^{(1)} h^{(3)} + \\
 & + \frac{2\mu}{r} \operatorname{ctg} \theta h^{(2)} h^{(3)} = 0,
 \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \rho_{,0} = 0.$$

We shall assume that the magnetic field is homogeneous and collinear to the first space like tetrad four-vector:

$$(4.9) \quad h^\mu = \hat{h} \lambda_{(1)}^\mu.$$

It then follows from Eqs. (4.5)–(4.7) that

$$(4.10) \quad p_{,1} + \frac{A}{2r^2} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1} (c^2 \rho + \rho \varepsilon + p) - \frac{2}{r} \mu |h|^2 = 0,$$

$$(4.11) \quad \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2\right)_{,2} = 0,$$

$$(4.12) \quad \left(p + \frac{1}{2} \mu |h|^2\right)_{,3} = 0.$$

Equations (4.10)–(4.12) are the relativistic conditions for magnetohydrostatic equilibrium of the plasma sphere.

If $|h| = 0$ we obtain exactly the conditions for mechanical equilibrium of a fluid sphere (see [4], Eq. 6).

We see that the pressure distribution depends on magnetic field, whereas in the case of an accelerating plasma [1] the pressure is not influenced by this. As a consequence of our analysis, the variation of the gravitational acceleration in the MHD field induces an extra influence of the magnetic field on plasma motion; the line element obtained by Möller [3] does not correspond to a static plasma distribution in gravitational field. This result is in accordance with that obtained by Brouke [5].

5. Anisotropic Gravitational Collapse. We now consider the equation of state

$$(5.1) \quad p = (x - 1) \rho (c^2 + \varepsilon),$$

where x is a constant satisfying $1 \leq x \leq 2$. The upper limit on x results from the requirement that the speed of sound in the plasma be less than the speed of light in vacuo. For $x = 1$, the pressure vanishes, so that equation of state is that of incoherent dust. The case $x = 4/3$ corresponds to highly relativistic charged particles or isotropic radiation, and $x = 2$ corresponds to stiff matter.

With this equation of state, the equation (4.10) becomes

$$(5.2) \quad p_{,1} = \frac{x}{x-1} \frac{A}{2r^2} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1} p - \frac{2}{r} \mu |h|^2 = 0$$

and thus it may be integrated when the magnetic energy density (or magnetic pressure) is known. In the case of the stiff matter, $\frac{1}{2} \mu |h|^2 = \rho c^2 + p$ (anisotropic gravitational collapse, see [6]), that is the magnetic energy density will grow at the same rate as the total fluid energy density. We can use Eq. (5.2) to describe a stage of the gravitational collapse of plasma sphere. In this case we have

$$(5.3) \quad p_{,1} + \left[\frac{x}{x-1} \frac{A}{2r^2} \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1} - \frac{4}{r} \frac{1}{x-1} \right] p = 0$$

and, by integration,

$$(5.4) \quad p = p_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{8+x}{2(x-1)}} \left(\frac{r_0 - A}{r - A} \right)^{\frac{x}{2(x-1)}},$$

where p_0 is the value of the pressure at a distance $r_0 > A$. In the limiting case $x = 2$, the expression (5.4) becomes

$$p = p_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^5 \frac{r_0 - A}{r - A}.$$

It follows that the total pressure will increase with distance as the collapse evolves in a nonrotating stiff plasma.

Received February 21, 1978

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Physics

REFERENCES

1. Ciubotariu C. D., J. of Math. Anal. a. Appl., 55,2, 272 (1976).
2. Ciubotariu C. D., Bul. Inst. polit. Iași, XXIII (XXVII), 3-4, s. I, 77 (1977).
3. Möller C., *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1952, p. 255.
4. Suhonen E., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 36, 15 (1968).
5. Brouke R., Am. J. of Physics, 39, 1461 (1971).
6. Mason D. P., Austr. J. of Physics, 29, 461 (1976).

SFERĂ DE PLASMĂ RELATIVIST GENERALĂ CU MASĂ GRAVITAȚIONALĂ CENTRALĂ

(Rezumat)

Se introduc ecuațiile magnetohidrodinamicii relativiste în raport cu un câmp tetric asociat elementului de linie Schwarzschild și se studiază proprietățile lor în cazul plasmei comobile.

Se stabilește că variația accelerației gravitaționale în câmpul MHD induce o influență suplimentară a câmpului magnetic asupra mișcării plasmei. Pentru stadiul de plasmă „rigidă” al unui colaps anizotrop se calculează distribuția presiunii în sfera de plasmă.

METODE DE DETERMINARE A BIREFRINGENȚEI OPTICE LA FIBRE

DE

SOFIA MELINTE, MARCEL MOISE, N. MATEESCU și M. LEANCĂ

1. Introducere. Dacă o fibră, în care moleculele sînt orientate, este așezată sub un microscop, între polarizii la extincție, în lumină albă, va etala culori de interferență care sînt mai intense cînd fibra este la 45° față de direcția de vibrație a polarizilor. Acest fenomen se datorește anizotropiei fibrei care prezintă indici de refracție diferiți după direcția longitudinală și transversală. Diferența între cei doi indici de refracție este o măsură a birefringenței. Anizotropia optică a unui polimer dat depinde numai de orientarea moleculară totală. Or orientarea este una dintre caracteristicile importante ale structurii polimerilor. De această structură sînt legate proprietățile mecanice, electrice cît și diversele aplicații ale polimerilor. Măsurătorile de birefringență au o deosebită importanță teoretică și practică.

Scopul acestei lucrări este de a pune la punct o serie de metode pentru determinarea birefringenței fibrelor cît și aplicarea lor în cazul firelor de polietilentereftalat (PET).

2. Partea experimentală. Materialul folosit în această lucrare îl constituie firele de PET filat, care au fost etirate sub diverse rapoarte de etirare la aceeași temperatură ($\approx 76^\circ\text{C}$).

2.1. Metoda culorilor de interferență. Fibrele textile naturale sau sintetice, prin tipul lor de structură și în funcție de procedeul de fabricație, posedă un indice de refracție diferit în sensul axei longitudinale, față de cea transversală. Valoarea diferenței acestor indici reprezintă birefringența și este o măsură a variației structurale a polimerului.

Pentru determinarea birefringenței prin această metodă s-a folosit un microscop tip MC₁ cu care s-a studiat firul în lumină polarizată între nicolii paraleli și la extincție, folosind lumină albă. La examinarea fibrei în lumină albă polarizată apar culori de interferență, datorită diferenței de drum optic între cele două raze (ordinară și extraordinară) introdusă de firul birefringent. Acestea sînt mai pronunțate cînd axa fibrei formează un unghi de 45° cu planul polarizorului (fig. 1). Din identificarea culorilor corespunzătoare celor două poziții ale nicolilor, se citea diferența de drum optic corespunzătoare din tabelul Michel L é v y. Măsurînd diametrul fibrei se determina birefringența totală cu relația

$$(1) \quad \Delta n = \frac{\delta T}{d} 10^{-3},$$

unde δT — diferența de drum optic (nm), d — diametrul fibrei (μm).

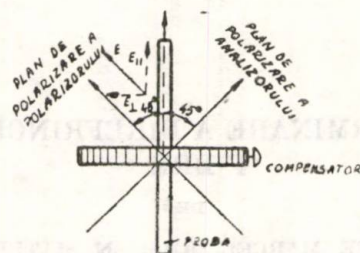


Fig. 1

Deci determinarea birefringenței comportă două măsurători: una a diametrului firului și a doua de determinare a diferenței totale de drum optic δ . Rezultatele sînt redată în tabelul 1.

Tabelul 1

Raport de etirare	$\Delta n \cdot 10^3$ metoda			$n_{ }$	$n_{\perp}$
	2.1	2.2	2.3		
filat	8,60	1,35	1,30	1,58850	1,58720
1,25	18,21	13,00	6,10	1,58510	1,57900
1,50	36,07	20,20	12,85	1,58220	1,56920
1,75	45,03	25,50	25,23	1,58915	1,56392
2,00	48,49	33,20	39,45	1,59320	1,55375
2,25	49,18	40,20	56,85	1,60545	1,54860
2,50	67,92	55,30	77,50	1,61770	1,54020
2,75	72,61	62,30	85,30	1,62550	1,53670
3,00	98,96	68,40	95,50	1,63570	1,54020
3,25	107,90	75,50	105,10	1,64530	1,54020
3,50	112,72	83,80	109,45	1,64965	1,54020
3,75	112,70	93,10	114,20	1,65400	1,54020
4,00	128,86	117,00	119,60	1,65980	1,54020

2.2. Metoda compensării. Pentru determinarea birefringenței prin această metodă se poate folosi fie un compensator rotitor cu mică $\lambda/4$ pentru $\lambda = 589,3$ nm sau un compensator de tip Sénarmot $\lambda = 546,1$ nm.

Între nicolii la extincție se introduce proba în poziție diagonală (fig. 1), a cărei imagine este redată în fig. 2. Apoi se introduce compensatorul paralel cu direcția polarizorului; prin rotirea analizorului se atinge din nou minimul, în lumină monocromatică. Pentru acest minim se citește unghiul de compensare.

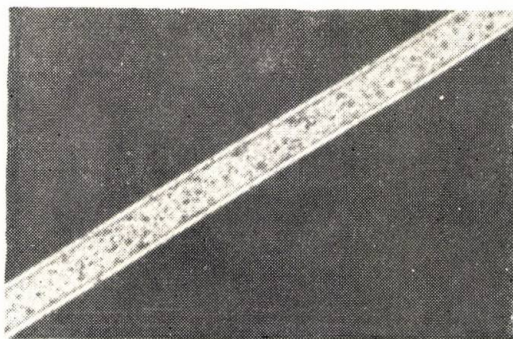


Fig. 2

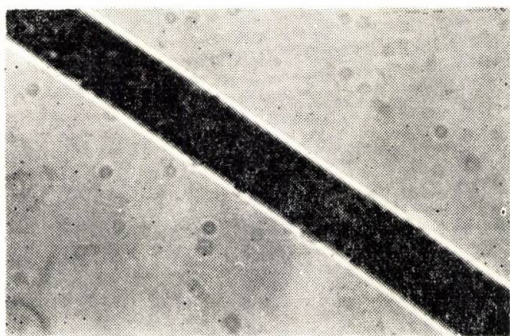


Fig. 3

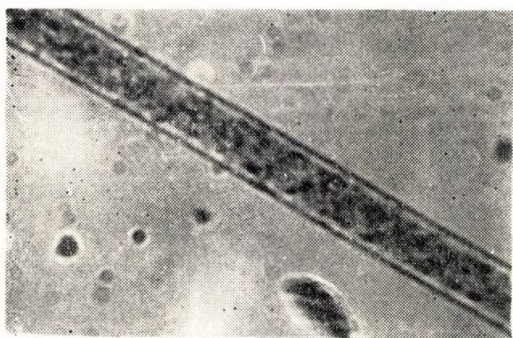
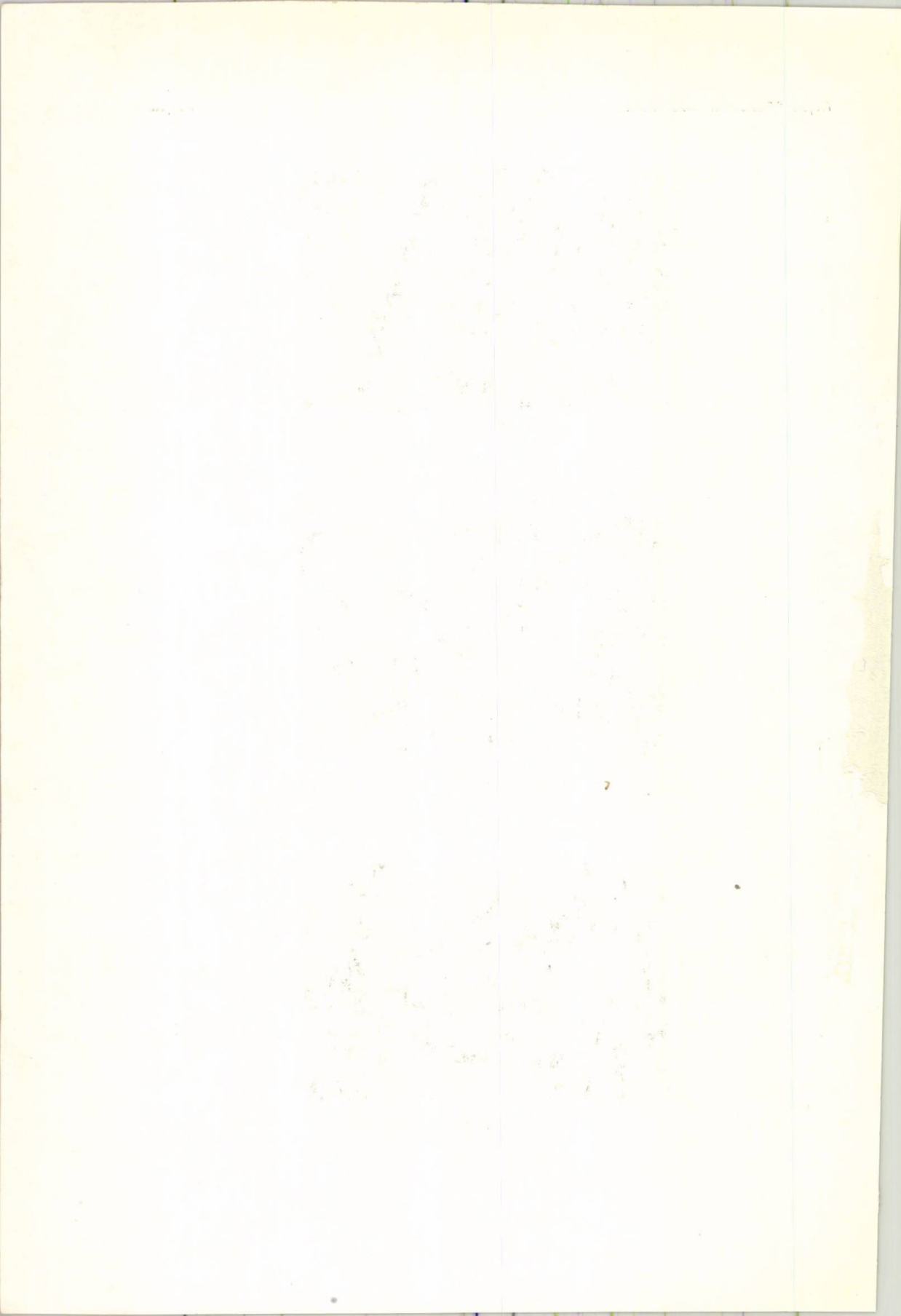


Fig. 4



Pentru primul minim s-a determinat diferența de drum reziduală

$$(2) \quad \delta r = \frac{\lambda}{180} \alpha,$$

unde $\lambda = 589,3$ nm iar α — unghiul de compensare.

Diferența totală de drum optic între cele două raze este

$$(3) \quad \delta T = k\lambda + \delta r,$$

unde k reprezintă ordinele întregi ale culorii de birefrință în lumină albă. În lucrarea de față, pentru obținerea unui rezultat mai concludent, r s-a determinat prin trei procedee: a) din culorile de interferență în lumină albă; b) cu ajutorul unui compensor tip Ehringhaus, reglat în lumină albă pentru linia de minim (de zero), care prin rotire trece de un număr de ori prin minim, prin numărarea minimelor s-au determinat ordinele întregi ale lui k ; c) cu ajutorul unei lame de cuarț sub formă de pană, ordinele întregi ale lui k obținându-se prin numărarea izocromatelor în lumină albă sau în monocromatică (pentru $k = 0$, $\delta T = \delta r$).

Birefrința totală a unui fir de grosime d , s-a determinat cu relația

$$(4) \quad \Delta n = \frac{k\lambda + \delta r}{d},$$

rezultatele obținute fiind redată în tabelul 1.

2.3. Metode liniei Becke. Orientarea macromoleculelor în lungul axei firului poate fi determinată prin măsurători de indici de refracție în lumină polarizată cu vectorul electric $\vec{E}$ paralel cu direcția de etirare $n_{||}$ și normal la această direcție $n_{\perp}$.

Tehnica de lucru constă în imersarea firului de studiat în diverse lichide cu indici de refracție apropiați de al său. Studiul s-a făcut în lumină polarizată monocromatică, sau albă, aducând firele paralel sau perpendicular cu planul de polarizare. Prin imersie la o diferență mică de indici de refracție, între lichid și fir se formează linii strălucitoare Becke, care conturează firul (fig. 3). La coborîrea platinei microscopului, linia Becke se deplasează spre corpul cu indice de refracție mai mare și invers, la ridicare către corpul cu indice de refracție mai mic. În momentul când indicele de refracție al lichidului de imersie este egal cu al firului, linia Becke dispare (fig. 4).

În scopul aplicării acestei metode este necesară o serie gradată de lichide incolore cu indici de refracție cunoscuți. Lichidele folosite sînt pe bază de iodură de metilen și au indicii de refracție, la 20°C, între 1,5127 și 1,6997, așezați în ordine crescătoare, avînd o diferență de o unitate la a treia cifră zecimală. Indicii de refracție ai lichidelor au fost determinați cu ajutorul unui refractometru Abbé. În tabelul 1 sînt redați indicii de refracție pe cele două direcții și birefrința totală determinată prin cele trei metode.

3. Discuții și concluzii. Din rezultatele obținute prin cele trei metode se deduce că birefrința crește odată cu creșterea raportului de etirare, ceea ce confirmă faptul că macromoleculele se orientează în lungul axei fibrei. Se constată că în cazul determinării birefrinței prin metoda liniei

Becke, birefrința atinge o valoare maximă pentru un raport de etirare de 3,25—3,50, ca apoi să rămână aproximativ constantă. Aceasta confirmă faptul semnalat de diverși autori [6], [7], că în prima fază a etirării se orientează doar partea amorfă și că odată cu creșterea etirării, fibrele tind către o structură cristalină, a cărei orientare devine măsurabilă și care manifestă o creștere lentă, concomitent cu creșterea gradului de etirare.

Valorile cele mai exacte se obțin prin imersie, întrucât această metodă este cel mai puțin afectată de erori. De asemenea, considerăm că metoda este cea mai indicată în determinarea birefrinței în cazul laboratoarelor uzinale pentru probe curențe, dacă se folosesc lichide incolore termostătate și cu o diferență a indicelui de refracție la a treia zecimală. Celelalte două metode sînt afectate de erori, deoarece aprecierea culorilor de interferență este oarecum subiectivă, depinzînd de cercetător.

Chiar dacă în stabilirea ordinului culorii de interferență se folosește compensatorul Ehringhaus, apar erori dacă nu se iau anumite precauții, deoarece ca urmare a diferenței de dispersie între calcit și PET, franjul minim apare colorat.

Primită la 4 mai 1977

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. НОВИКОВ А. С., ИВАНОВ Р. С., Химические волокна, 6, 54 (1961).
2. Nobus J. H., Bower D. I., Ward I. M., J. Polymer Sci., 17, 1, 25—36 (1976).
3. Mc Lean J. H., Textile Res. J., 41, 1, 90—91 (1971).
4. Mc Lean J. H., Textile Res. J., 35, 242—246 (1965).
5. Thetford A., Siemmens S. C., Birefringence Phenomena in Cylindrical Fibers (I). J. Microscopy, 89, 143—150 (1969).
6. Dambetou J. H., J. Polym. Sci., A₂, 6, 795 (1968).
7. Kozalowski W., Przegląd Włakienniczy, 32, 3, 130 (1969).

MÉTHODES POUR LA DÉTERMINATION DE LA BIRÉFRINGENCE OPTIQUE DES FIBRES

(Résumé)

À cause de la complexité structurale des fibres, pour caractériser leur orientation ont été effectuées des mesures de la biréfringence, en utilisant différentes méthodes.

Pour mesurer la biréfringence totale on a utilisé la méthode de la compensation, avec le compensateur Ehringhaus, qui est la plus rapide. La méthode de l'immersion fait distinction entre diverses directions d'orientation, en déterminant des indices de réfraction individuels; elle est la plus exacte. Mais par cette méthode on détermine seulement la biréfringence de l'enveloppe de la fibre et non pas celle de la fibre entière.